This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

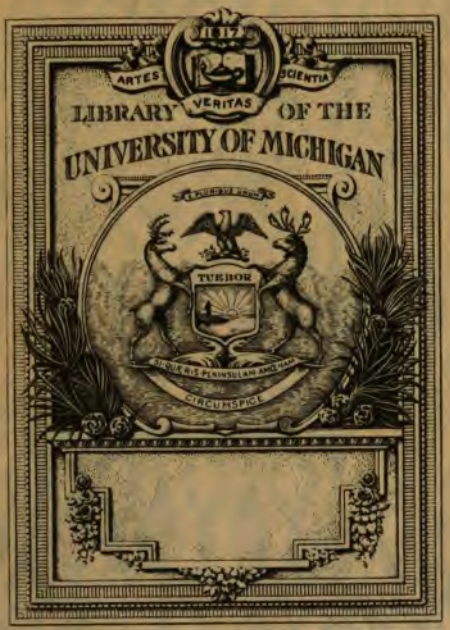
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

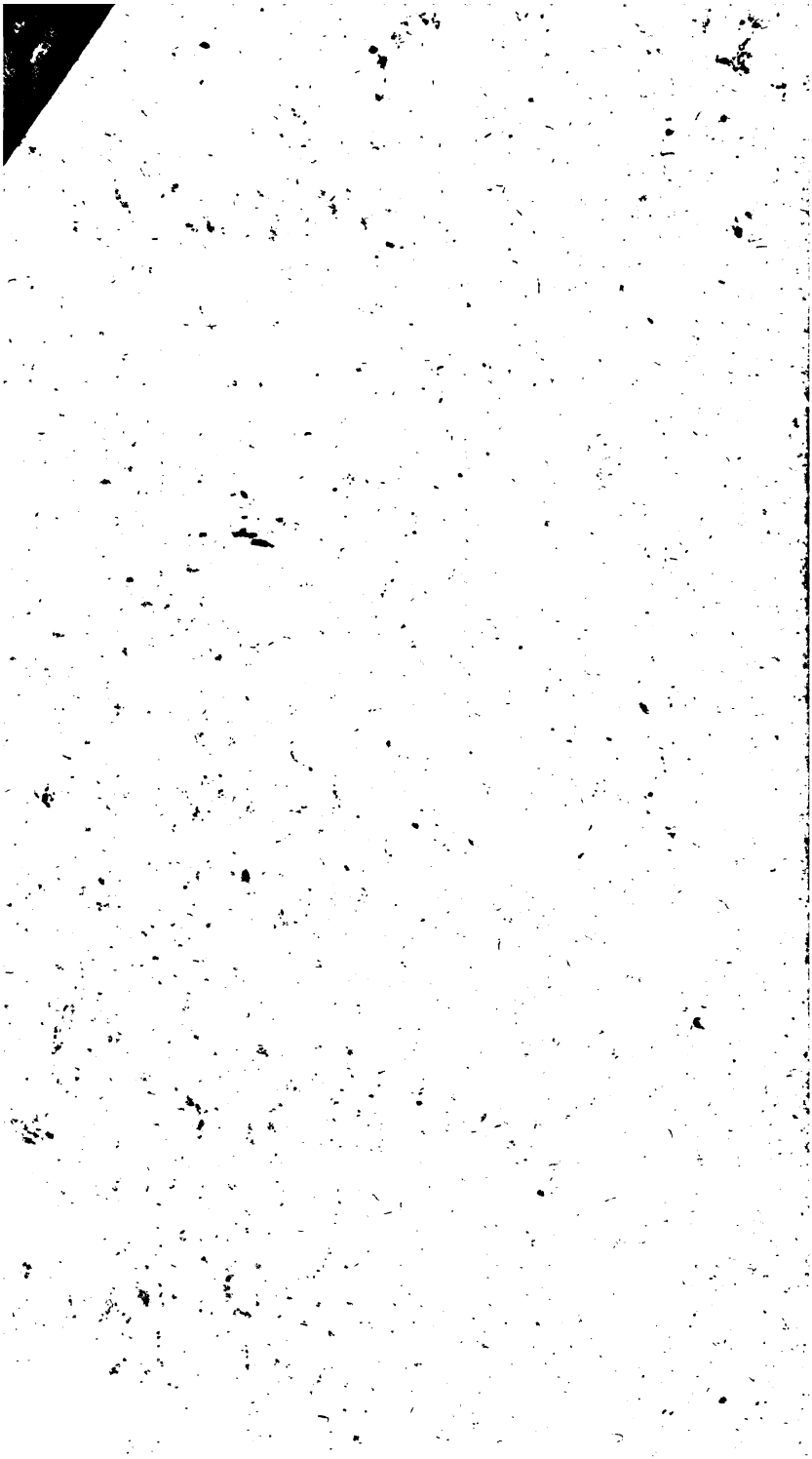
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

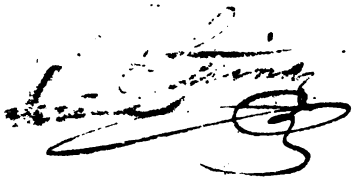
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

A 546595


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SIRCUMSPICE



QA
302
.P28



Unterricht
in der
Mathematischen Analysis
und
Maschinen-Lehre

Beylage
zum
ersten und zweyten Bande
Erweiterungen und Berichtigungen
enthaltend

Verfaßt
von

Johann Pasquich
der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften auswärtigem Mitgliede, und vormaligem Professor der höheren Mathematik an der Ungarischen Universität
zu Pest

Leipzig
in der Weidmannischen Buchhandlung 1798.

Dem

Wohlgebohrnen Herrn

Georg Sigismund Lakics

Seiner Kaiserl. Königlichen Majestät

Hofrathe

Der

Ungarischen Studien-Commission Beysitzer

Der

Juristischen Facultät

an der Königlichen Universität zu Pest Director

und Präses

Und

der Universitäts-Buchdruckerey

Director

Widmet

Diese Schrift

Als ein

Zeugniß

Seiner immerwährenden Verehrung

Und freundschaftlichen

Hochachtung

Der

Verfasser.

Hist. of Sci.
Ramsel Lib
3-4-30
20758

Vorrede.

Je weniger ich selbst mit meiner bisherigen Arbeit zufrieden bin, zu desto größerem Vergnügen gereicht mir der ausnehmende Beyfall, mit dem die beyden Bände meines Unterrichts in der Mathematischen Analysis von Kennern sind aufgenommen worden: ich würde ihn besser verdient haben, wenn ich nicht das Unglück gehabt hätte, mich, als ich daran arbeitete, in den mißlichsten Gesundheitsumständen zu befinden: dieses mag mir, wegen der darin vorhandenen Mängel, zur Entschuldigung dienen.

Mein Vorsatz war, die Berichtigungen mangelhafter Stellen und eine genaue Anzeige der Schreib- und Druckfehler, nebst Verbesserungen im dritten Bande bekannt zu machen; welches auch schon lange geschehen seyn würde, wenn der Krieg die Herausgabe desselben nicht gehindert hätte. Erst jetzt hat sich die Verlagshandlung entschließen können, mit der Herausgabe meiner mechanischen Abhandlungen nächstens den Anfang zu machen, welche aber aus manchen Beweg-

gründen, ſtatt der Fortſetzung des angefangenen Werks, ein neues Werk in lateiniſcher Sprache, unter dem Titel: *Opuſcula Statico-Mechanica*, ausmachen ſollen, worüber ich mich an einem andern Orte umſtändlich erklären werde: und eben durch dieſen Umſtand bin ich vor vier Monaten zur Abfaſſung dieſer Beylage veranlaßt worden.

Der Zweck, den ich durch ſie zu erreichen wünſche, beſtehet lediglich darin, durch Berichtigung und Erweiterung des in beyden Bänden enthaltenen Unterrichts in der mathematiſchen Analyſis, und durch Anwendung dieſer auf die Auflöſung einiger zur höheren Geometrie und Mechanik gehörigen Fundamentalaufgaben, ſoviel zur Vollſtändigkeit deſſelben Unterrichts beyzutragen, als ein Anfänger nöthig hat, um auch den richtigen Gebrauch der Analyſis daraus kennen zu lernen. Habe ich dieſen Zweck wirklich erreicht; ſo iſt dadurch für die Brauchbarkeit jenes Unterrichts, auch unabhängig von der Fortſetzung, die nun wegfallen ſoll, genugſam geſorgt worden.

Unter andern hat der mir unbekannte Hr. Recenſent in der Allgem. Litt. Zeitung im Jahre 1792. No. 275. manche Bemerkungen gegen den Inhalt des zweyten Bandes gemacht, und am Ende gewünſcht, daß ſie dem Verfaſſer und ſeinen Leſern nicht überflüßig ſcheinen mögen. Es läßt ſich ſchon aus meiner obigen Erklärung leicht abnehmen, daß ich ſie von Kennern wirklich erwartete: einige waren wichtig und gegründet, die

mir

mir demnach nichts weniger als überflüßig scheinen konnten, wovon in gegenwärtiger Beylage der Beweis gegeben wird: indessen hätte ich gewünscht, daß einige andere Bemerkungen entweder anders lauteten, oder gar nicht da stünden.

Wenn z. B. Hr. Recensent sagt: »Die Differen»tialien nennt der Verfasser immer mit einem unge»wöhnlichen Namen, Verschwindungsquotienten. »Schon daraus übersieht man, von welchen Begriffen »er ausgeht, und nach welcher Methode er die Gründe »der sogenannten Rechnung des Unendlichen festsetzt.« So wird ja dadurch jedem Kenner ein ganz verkehrter Begriff von der Vorstellungsart, deren ich mich bediene, beygebracht, anstatt daß er in den Stand gesetzt werden sollte, sich einen ächten Begriff davon zu machen. Das, was alle Analysten das Differential einer Function y nennen, und mit dy bezeichnen, wird ja bey mir nicht der Verschwindungsquotient genannt: ist $\Delta y = \alpha \Delta x + \beta \Delta x^2 + \gamma \Delta x^3 +$ etc., mithin $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha + \beta \Delta x + \gamma \Delta x^2 +$ etc.; so heißt bey mir der Verschwindungsquotient der völlig bestimmte Werth α, welchen der Differenzquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ im Verschwindungszustande der Differenz Δx der absoluten veränderlichen Größe x haben würde: diesen bezeichne ich mit dy, anstatt daß dy sonst das Differential von y, als 0, oder als eine wirkliche, doch unendlich kleine Differenz

von y, und $\frac{dy}{dx} = \alpha$ den Exponenten des Differentialverhältnisses bedeutet. Ueberall habe ich nur die Exponenten der Differentialverhältnisse, als endliche Größen, zum Gegenstande der Differentialrechnung gemacht, nur sie von einem andern Gesichtspuncte betrachtet, daher auch anders benannt, und ihre Eigenschaften aus untrüglichen Gründen abgeleitet, unabhängig von allen Begriffen des Unendlichen: die Differentialrechnung erscheint daher im zweyten Bande als ein Theil der Analysis endlicher Größen, und die Methode, deren ich mich zur Erfindung der Exponenten der Differentialverhältnisse unbekannter Functionen daselbst bedient habe (20. §. Zus.), ist nichts anders, als eine Anwendung der Archimedeischen Exhaustionsmethode.

Wie ich von der Archimedeischen Exhaustionsmethode, und ihrem Zusammenhange mit der Differentialrechnung denke, habe ich im vierten Abschnitte dieser Beylage zu zeigen gesucht, wozu ich mich nur einiger Bruchstücke meiner critischen Untersuchungen über den Ursprung und Fortgang der Gränzenlehre bedient habe. Im zweyten Abschnitte habe ich die Gründe der Differentialrechnung aus den gewöhnlichen Begriffen der Gränzen und Differentialverhältnisse abgeleitet, und auch jetzt die Differentialrechnung als einen Theil der Analysis endlicher Größen betrachtet; man kann aber aus (57. §.) den ganz richtigen Schluß machen: der Exponent dy des Differentialverhältnisses

jeder

jeder Function y von einer abſoluten veränderlichen Gröſſe x iſt alſo der ganz beſtimmte endliche Werth (bey der Vorausſetzung, daß y endlich iſt), welchen der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ im Verſchwindungszuſtande der Differenz Δx haben würde. Durch dieſen einzigen Schluß würde man alle folgende Unterſuchungen, vom 58ſten §. an, in die im zweyten Bande verwandeln, wodurch ich den Vortrag abzukürzen geſucht habe.

Iſt es aber geſtattet, bey der Betrachtung der Differentialverhältniſſe $\Delta x = 0$ zu ſetzen? Geſetzt, man habe $\Delta y = K\Delta x + L\Delta x^3 + M\Delta x^3 + \text{etc.}$, mithin $\Delta y : \Delta x = (K + L\Delta x + M\Delta x^2 + \text{etc.}) : 1$. Nun können hier zwo Fragen entſtehen, nämlich: wie groß iſt hier der Exponent des Differentialverhältniſſes von x? und wie erhält man ihn aus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = K + L\Delta x + M\Delta x^2 + \text{etc.}$? Die Beantwortung der erſten Frage giebt der Begriff an, den man ſich von einem Differentialverhältniſſe gemacht hat: aus der gewöhnlichen Erklärung (52. §.) folgt, er müſſe $= K$ ſeyn (56. §): eben dadurch wird aber auch die Beantwortung der zweyten Frage beſtimmt, daß nämlich der Exponent des Differentialverhältniſſes von y aus $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ erhalten wird, wenn man hier $\Delta x = 0$ ſetzt. Ich habe zwar nirgends in dieſer Beylage $\Delta x = 0$ geſetzt, doch wäre dieſes erlaubt geweſen, etwa wenn einige Unterſuchungen dadurch hätten

abgekürzt werden ſollen. Selbſt L'Huilier, der doch alles aus den eigentlichen Begriffen der Differentialverhältniſſe abzuleiten ſich bemühet hat, behauptet in ſeiner Preisſchrift, da, wo von Gränzen der Verhältniſſe $\Delta y : \Delta x$ die Rede iſt, ſey wirklich $\Delta x = 0$. „*Donc, en particulier, ce dernier membre reſte le même, lorsqu' aux parties qui le compoſent on ſubſtitue leurs limites; ce qui a lieu en faiſant* $\Delta x = 0$.“ (pag. 81.). Und an einem andern Orte (pag. 143.): „*mais cette dernière expreſſion n'eſt juſte qu'en tant que la ſous-ſécante ſe reduit à ſa limite, qui eſt la ſoustangente, lorsqu' au rapport des changements ſimultanés de l'ordonnée et de l'abſciſſe on ſubſtitue la limite de ce rapport, dans lequel cas* Δx *eſt toujours rigoureuſement zéro.*“

Eine andere Bemerkung des Hrn. Recenſenten wird wohl auch dieſe Beylage betreffen, ob ich gleich hier nach ſeinem Wunſche, die Differentialverhältniſſe als Gränzen der Differenzverhältniſſe betrachtet, und alles aus dieſem feſtgehaltenen Begriffe abgeleitet habe. „Nach des Verfaſſers Begriff und Bezeichnung §. 5.“ (in gegenwärtiger Beylage 52. §.) „bezieht ſich — ſagt Hr. Recenſent, — „jedes Differential einer Function „(das immer als Vermehrungsquotient betrachtet wird) „auf das als Einheit angenommene Differential der veränderlichen Größe: was iſt nun bey dy^{uv} die Einheit?“ Dieſe Frage kann nur durch (55. §.) hier veranlaßt werden, und daraus ergiebt ſich die ganz natürliche

Beant-

Beantwortung, nämlich diese: ist sowohl u als v eine absolute veränderliche Größe; so muß sowohl $du = 1$, als $dv = 1$ seyn: ist v allein eine absolute veränderliche Größe, und u eine Function von v; so muß $dv = 1$, aber nicht auch $du = 1$, seyn: sind aber u, v gewisse Functionen von einer absoluten veränderlichen Größe x; so hat man $dx = 1$, aber weder $du = 1$, noch $dv = 1$. Es erhellet ferner aus (56. §.) daß $dy = K$ der vollständige Ausdruck des Exponenten des Differentialverhältnisses einer Function y ist, bey welcher das Differenzenverhältniß $\Delta y : \Delta x = (K + L\Delta x + M\Delta x^2 + \text{etc.}) : 1$ Statt findet: wegen (55. §.) kann man aber $dy = Kdx$ schreiben, wobey nun $dx = 1$ den Exponenten des unveränderlichen Verhältnisses $\Delta x : \Delta x = 1 : 1$, mithin eine abstracte Einheit bedeutet. Solche Einheiten sind demnach auch du, dv, wenn u, v absolute veränderliche Größen sind; ich bediente mich derselben, damit meine Formuln, der äußeren Form nach, mit den gewöhnlichen übereinstimmen mögen: an andere Einheiten aber, wie Hr. Recensent zu denken scheint, habe ich nirgends gedacht, auch nicht denken können. Uebrigens habe ich auch in gegenwärtiger Beylage die Erklärung des Differentialverhältnisses einer Function von zwoen veränderlichen Größen (87. §.) anders eingerichtet, als sie von andern gegeben wird: andere geben vielmehr keine Erklärung; setzen nur die für Functionen von einer veränderlichen Größe geltende voraus; und nehmen dabey, ausdrücklich, oder stillschweigend

an,

an, daß auch die Functionen von zwoen veränderlichen Größen, als solche können betrachtet werden, welche auf eine einzige absolute Größe sich beziehen, welches aber bey einer allgemeinen Untersuchung nicht geschehen sollte (86. §.).

Leipzig
den 14ten April
1798.

Pasquich.

Inhalt.

Inhalt.

Der I. Abschnitt. Beyträge zur Berichtigung und Erweiterung des im ersten Bande enthaltenen Unterrichts.

Allgemeine Sätze, worauf die gesammte analytische Gränzenlehre beruhen soll. Anwendungen davon auf die Erfindung des binomischen Lehrsatzes, der logarithmischen und trigonometrischen Reihen, und derjenigen Werthe der veränderlichen Größen, für welche ihre Functionen am größten oder kleinsten werden. Grundriß einer neuen Exponentialrechnung von gleichem Gebrauch mit der Differentialrechnung. Berichtigung und Erweiterung einiger Sätze die höheren Gleichungen betreffend.

Der II. Abschnitt. Von den ersten Gründen der Differentialrechnung, insofern sie sich als ein Theil der Analysis endlicher Größen betrachten läßt; nebst Erweiterung der im zweyten Bande enthaltenen Integralrechnung.

Allgemeine Gründe der Differentialrechnung. Anwendung auf die Differentiirung gegebener Functionen. Differentialverhältnisse von höhern Ordnungen. Differential- und Differentio-Differentialverhältnisse der Functionen von zwoen veränderlichen Größen. Integrirung der Differential- und Differentio-Differential-Exponenten und Gleichungen.

Der

Der III. Abschnitt. Von den Grundformuln, worauf die Anwendung der Differentialverhältnisse auf die höhere Geometrie und Mechanik beruhet.

Formuln für die Tangenten; Subtangenten; Normallinien; Subnormallinien; den Krümmungshalbmesser; die Rectification krummer Linien; Quadratur der ebenen Flächen; Cubatur runder Körper; und die Quadratur ihrer Oberflächen; alles für rechtwinklichte Coordinaten. Anwendung davon auf die schiefwinklichten, und die von einem Punkte ausgehenden Ordinaten. Von der Bewegung überhaupt, und der unveränderlichen, und gleichförmig beschleunigten insbesondere. Allgemeine Formuln zur Beurtheilung der Bewegung einer körperlichen Masse, welche von einer unveränderlichen oder wie immer veränderlichen Kraft nach geradlinichter Richtung fortgetrieben wird. Von der Bewegung der Körper um gegebene Axen, und dem damit verbundenen Momente der Trägheit. Anwendung auf einfache und zusamengesetzte Penduln.

Der IV. Abschnitt. Von der Exhaustionsmethode der Alten, und der ihr angemessensten Methode die Gründe der Differential- und Integralrechnung festzusetzen.

Bemerkungen den Hauptgrund der Exhaustionsmethode der Alten, und die Ueberzeugung, die er gewähret, betreffend. Seine Wichtigkeit in Verbindung mit der Summirung der Reihen natürlicher Zahlen, ihrer Quadrate und Würfel; auch unbestimmter Potenzen. Uebergang zur Differential- und Integralrechnung, und Bestimmung der vortheilhaftesten Methode, nach welcher die Gründe derselben sich fest setzen lassen.

Verzeichniß

der im ersten Bande enthaltenen Druck- und Schreibfehler, nebst Verbesserungen.

Auf der

15 Seite. 20 Zeile statt nnd lese man und.

21 S. 1 Z. von unten, statt nemeinenden l. m. verneinten.

26 S. 4 Z. statt $a^{\frac{1}{m}}$ l. m. $\frac{1}{a^m}$.

27 S. 1 Z. statt ^{ba}m l. m. ba^m.

30 S. 11 Z. statt oder a^m l. m. oder a^{-m}.

33 S. 11 Z. statt beruhen l. m. beruhet.

35 S. 16 Z. statt dem l. m. den.

37 S. 3. Z. statt $\sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}}$ l. m. $\frac{1}{\sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}}}$.

—— 10 Z. statt $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)$ l. m. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r$.

—— 14 Z. statt $\left(a^{\frac{m}{nr}}\right)$ l. m. $\left(a^{\frac{m}{n}r}\right)$, und statt $a^{\frac{m}{n}}$ l. m. $a^{\frac{m}{n}}$.

39 S. 4 Z. statt $^s n\, a^{\frac{r}{s}}$ l. m. $a^{\frac{m}{n}}$, $\frac{s}{a^{\frac{r}{s}}}$.

49 S. 2. 4. 8. Z. von unten, statt $24a^4c^2$ l. m. $24a^4bc$.

73 S. 12. Z. statt aus 8. 16) l. m. aus 8 und x.

79 S. 5 Z. statt —C l. m. =C.

—— 6 Z. statt —Dn l. m. =Dn.

82 S. 4 Z. von unten, statt AB l. m. A—B.

Auf

Auf der

109 Seite. 18 Zeile ſtatt $\frac{b}{a}$ l. m. $\frac{b}{a}$.

113 S. 19. 20 Z. ſtatt (n−2)ten l. m. (n−1)ten.

129 S. 5 Z. ſtatt A.β l. m. A.δ.

130 S. 2 Z. ſtatt welchen l. m. welche.

131 S. 11 Z. ſtatt 19928 l. m. 15928. und ſtatt 9964 l. m. 7964.

136 S. 13 Z. ſtatt $a\sqrt[n]{b^n cu}$. $g\sqrt[n]{d2ne}$ l. m. $a\sqrt[n]{b^n c}$ und $g\sqrt[n]{d^{2n}c}$.

136 S. 14 Z. ſtatt $g\sqrt[n]{d2n^c}$ l. m. $g\sqrt[n]{d^{2n}c}$.

142 S. 14 Z. ſtatt $=\sqrt[n]{(a-c)}\sqrt{b}$ l. m. $(a-c)\sqrt[n]{b}$.

146 S. 3 Z. von unten, ſtatt $(+a)^2$ l. m. $(+a)^{2n}$.

156 S. 10 Z. ſtatt $(y+x)^3$ l. m. $(y+z)^3$.

158 S. 6 Z. von unten, ſtatt $(a+b)^3-$ l. m. $(a+b)^3=$.

190 S. 3 Z. ſtatt $(Z+X^2.E$ l. m. $(Z+X)^2.E$.

200 S. 3 Z. von unten, ſtatt $a^{m-2}b$ l. m. $a^{m-2}b^2$.

201 S. 12 Z. ſtatt $1\alpha x$ l. m. $1+\alpha x$.

208 S. 6 Z. ſtatt (n. 8. IV.) l. m. (n. 8. III.).

211 S. 1 Z. von unten, ſtatt 3m l. m. 2m.

212 S. 13 Z. ſtatt $\frac{4L^{III}\beta}{4}$ l. m. $\frac{4L^{II}\beta}{4}$.

243 S. 14 Z. ſtatt $\frac{b^2}{a^m}$ l. m. $\frac{b^2}{a}$m.

248 S. 1. 3. 5. Z. ſtatt −B l. m. B.

249 S. 6 Z. von unten, ſtatt α^2 l. m. α^2p.

273 S. 5. Z. ſtatt cy^3Cy^{n-2} l. m. $c^2y^3Cy^{n-2}$.

Auf

Auf der

274 Seite. 12 Zeile ſtatt $-2y^2$ l. m. $-3y^2$.

275 S. 13 Z. ſtatt -40 l. m. -50.

305 S. 4 Z. ſtatt $+\infty^m$ l. m. $=+\infty^m$ für $x=\pm\infty$.

324 S. 17 Z. ſtatt $(p+u)^m$ l. m. $(p+u)^n$.

382 S. n. 4. ſtatt $x=y-$ l. m. $x=y+$.

394 S. 1. 3 Z. von unten, ſtatt $\frac{-233}{3\cdot3\cdot3\cdot33}$

l. m. $\frac{+7}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}$

395 S. 3. 4 Z. von unten, ſtatt $-\sqrt{x}$ und $-x^{\frac{1}{2}}$ l. m. $+\sqrt{x}$ und $x^{\frac{1}{2}}$.

409 S. 1. 2 Z. von unten, und 410 S. 2. 6. 8 Z.

ſtatt 10000000000, 200000000
10200000000, 106250000

l. m 100000000000, 2000000000
102000000000, 1062500000

411 S. 7. 8 Z. ſtatt $m=\frac{1}{\mu}$ und $a=c^{\mu}$ l. m. $m=-\frac{1}{\mu}$, $a=c^{\mu}$ und $b=-\frac{c^{\mu}b}{c^{\mu}+b}$.

413 S. 10 Z. ſtatt $=7$ l. m. $=\frac{7}{}$.

429 S. 5 Z. ſtatt $\log 2^2 2=\log 2$ l. m. $=\log 2^2=2\log 2$.

437 S. 1 Z. von unten, ſtatt (n. 5.) l. m. (n. 4.)

461 S. 4 Z. von unten, ſtatt $+n2$ l. m. $+2n$.

464 S. 4 Z. ſtat XVII. Form. l. m. XVIII. Form.

466 S. 6 Z. von unten, ſtatt $(qn-1)$ l. m. $q(n-1)$.

469 S. 6. 8 Z. von unten, ſtatt $L(n-1)+M(n-1)^2+\cdots+R(n-1)^m(A+Bn)$ l. m. $(L(n-1)+\cdots+R(n-1)^m)(A+Bn)$.

Auf der

484 Seite. Beym letzten Beyspiele lese man überall 2 . 6 statt 3 . 6.

485 S. 5 Z. von unten, statt 104 l. m. 108.

489 S. II. Formul, statt $+s(q-1)$ l. m. $-s(q-1)$.

503 S. 6 Z. von unten, statt Ca und C; a l. m. CM und C; M.

Einige andere Fehler sind im ersten Abschnitte, 39. §. angezeigt worden.

Verzeichniß

der im zweyten Bande enthaltenen Druck und Schreibfehler, nebst Verbesserungen.

Auf der

X. Seite. 10 Zeile, statt der Grundsatz, lese man den Grundsatz. Und 13 Zeile, statt ausdrücklich, l. m. soll man ausdrücklich.

19. S. 6 Z. statt $u = Z - Y$ l. m. $u = Y - Z$.

22 S. 7 Z. statt $y = \frac{1}{2}$ l. m. $y = \frac{1}{x^2}$.

87 S. 1 Z. statt $-\frac{\mathrm{Sin}\,l\frac{1}{x}\,dx}{x}$ l. m. $+\frac{\mathrm{Sin}\,l\frac{1}{x}\,dx}{x}$

93 S. 9 Z. statt $\frac{1-\varphi^2}{1\,.\,2}$ l. m. $1-\frac{\varphi^2}{1\,.\,2}$.

99 S. 4 Z. von unten, statt $z^{\frac{u}{v}}\,dz$ l. m. $z^{-\frac{u}{v}}\,dz$.

104 S. 1 Z. statt $\frac{4}{7}x^{-3}dx$ l. m. $\frac{4}{7}x^{-\frac{1}{3}}dx$. und 4. Z. statt $-(1-x^2dx$ l. m. $-(1-x^2)dx$.

106 S. 5. Z. statt $2.4.\beta^3$. l. m. $2.4.\beta^{\frac{3}{2}}$, und 6 Z. statt β^9 l. m. $\beta^{\frac{9}{2}}$.

Auf

Auf der

107 S. 2 Z. von unten, ſtatt γ^6 l. m. γ^5.

108 S. 1 Z. ſtatt $x^{\frac{m}{2}}$ l. m. $x^{\frac{m-2}{2}}$ und 4 Z. ſtatt $x^{(2r+1)m-2rn-2}$ l. m. $x^{\frac{(2r+1)m-2rn-2}{2}}$

129 S. 1 Z. ſtatt $-\frac{2}{7}\left(\frac{3-5x^2}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}$ l. m. $-\frac{2}{7}\left(\frac{3-5x^2}{x^2}\right)^{\frac{7}{2}}$.

147 S. 2 Z. ſtatt $+B\int\frac{dx}{X}$ l. m. $+B\int\frac{x\,dx}{X}$.

—— 2 Z. von unten, ſtatt $8\sqrt{\gamma}$ l. m. $8\gamma\sqrt{\gamma}$.

—— 4 Z. von unten, ſtatt $+\frac{2}{2\sqrt{\gamma}}$ l. m. $+\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}}$.

149 S. 3 Z. ſtatt 2^{3n} l. m. 2^{3n-1}.

157 S. 8 Z. ſtatt $-2x^m$ l. m. $+2x^m$.

—— 2 Z. von unten, ſtatt die ſchon bekannten Integralien $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$ (36. §.) und $\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (37. §.) l. m. das ſchon bekannte Integral $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (36. §. §).

163 S. letzte Z. ſtatt $\mp$ l. m. $\pm$.

165 S. 4 Z. ſtatt $x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu+2}}$ l. m. $x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu+2}}$

170 S. 10 Z. ſtatt $\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{-2}}$ l. m. $\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-2}}$.

173 S. 1. 2. 3 Z. von unten, ſtatt $(\alpha+\beta x)^{\mu+2}$, $(\alpha+\beta x)^{\mu}$, $(\alpha+\beta x)^{\mu-2}$ l. m. $(\alpha+\beta x)^{\mu}$, $(\alpha+\beta x)^{\mu-2}$. $(\alpha+\beta x)^{\mu-4}$.

174 S. 1 Z. ſtatt $(\alpha+\beta x)^5$ l. m. $(\alpha+\beta x)^3$.

177 S. 9 Z. ſtatt iſt; ſo erhält man dadurch folgendes Integral 5, l. m. für ein bejahtes ſowohl als verneintes α und β zugleich, hingegen der

zweyte Theil $= -\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta\sqrt{\beta}} \log \frac{\beta x+\alpha+\sqrt{\beta x}}{\beta x-x} + C$

(39. §. V. Form.) für ein bejahtes β und verneintes α ist; so erhält man dadurch folgende Integralien 5) 6).

178 S. Nach der Formul 5) setze man 6) $\int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\beta x-\alpha} =$

$$= \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\beta} - \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta\sqrt{\beta}} \log \frac{\beta x+\alpha+\sqrt{\beta x}}{\beta x-\alpha} + C.$$

179 S. 3 Z. statt $5 \cdot 3 \cdot \alpha^{\frac{\mu-1}{2}}$ l. m. $\alpha^{\frac{\mu-1}{2}} \sqrt{(\alpha+\beta x)}$.

180 S. 8. Z. von unten, statt $\mu < n$ l. m. $\mu < n-2$.

— — 4 Z. von unten, die Einschränkung, doch ist 4) für den Fall, wo v eine, etc. muß wegbleiben.

181 S. 5 Z. von unten, statt $\sqrt{(\alpha+\beta x)^{-6}}$ l. m. $\sqrt{(\alpha+\beta x)^{\mu-6}}$.

183 S. 2 Z. statt -2β l. m. $-2\beta^2$.

208 S. 4 Z. von unten, statt und eine l. man und m eine.

247 S. muß bey 6) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\varphi^n \mathrm{Cos}\varphi^m}$ stehen.

275 S. 14 Z. statt $z\frac{1-mz}{z}$ l. m. $z+\frac{1-mz}{z}$.

278 S. statt $\log \frac{1}{\sqrt{(u+\sqrt{(u^2+v^2)})}}$ l. m. $l \frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{(u+\sqrt{(u^2+v^2)})}}$.

282 S. statt $+(E+C)z+B$ l. m. $+(E-C)z-B$.

statt $\frac{1}{2}(E-C)$ l. m. $\frac{1}{2}(E+C)$.

Dieses hat im 2ten Zusatz ein falsches Integral veranlaßt: denn für $C=E$ muß nun nach der Aufgabe $C = \log\mu + \log\sqrt{(Fz^2-B)} + C\int \frac{dz}{Fz^2-B}$,

die

die mit $(A+Bu+Cv)du-(D+Cu+Fv)dv=o$ zusammenhängende Integralgleichung seyn.

Auf der

288 Seite 3 Zeile von unten, statt $\frac{C}{(u+\sqrt{(1+u^2)})}$ l. m. $\frac{C}{(u+\sqrt{(1+u^2)})^n}$.

289 S. 4. 1 Z. statt der dortigen Integralien für $n=-1$ und $n=1$ setze man folgende:

$$v=\left(C-a\sqrt{(1-u^2)}-2a\,\text{Arc Tang}\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\right)\sqrt{\frac{1-u}{1+u}},$$

$$v=\left(C+a\sqrt{(1-u^2)}-2a\,\text{Arc Tang}\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\right)\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}.$$

292 S. letzte Z. statt dy(l. m. dy=.

304 S. 5 Z. von unten, statt $-3181.2x+243$ l. m. $-318x+243$.

355 S. letzte Zeile. statt ± 2 l. m. ∓ 2.

366 S. 3 Z. von unten, statt $\frac{dP}{dx}=-nx^{n-c}$ l. m. $\frac{dP}{dx}=-na^{n-1}$.

387 S. 3 Z. statt rr l. m. in r.

401 S. 2 Z. statt 6 l. m. b.

—— letzte Z. statt AP=y l. m. AP=x.

402 S. 7 Z. von unten, statt $:-\frac{\alpha}{\beta}$ l. m. $:\frac{\alpha}{\beta}$.

408 S. 9 Z. statt dy l. m. dg.

412 S. 8 Z. von unten, statt qCf l. m. q'Cf.

413 S. 3 Z. statt CP=a l. m. CP=u.

—— 12 Z. statt Ae-CD l. m. Ae=CD.

Auf der

413 S. Bey 9 Zuſatz muß Fig. 14. vor Augen ſtehen.

422 S. 16 Z. ſtatt CQ = u l. m. CF = u.

423 S. 6 Z. ſtatt $+b^2$ l. m. $-b^2$.

424 S. letzte Z. ſtatt $\frac{1}{2}a$ l. m. $\frac{1}{2}a$.

425. S. im 102. §. ſoll 13. Figur ſtatt 15 ſtehen.

439 S. 1. Z. ſtatt Avn l. m. Cvn.

449 S. 11 Z. ſtatt $\frac{2ab}{\sin\beta}$ l. m. $\frac{2ab}{\sin\beta}$).

465 S. letzte Z. ſtatt $-\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2$ l. m. $\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2$.)

480 S. 5 Z. ſtatt QMdA l. m. PMdA.

488 S. 6 Z. von unten, ſtatt C l. m. γ.

489 S. 14 Z. ſtatt DBE l. m. DAE.

494 S. 9 Z. von unten, ſtatt 3b l. m. $3b^2$.

495 S. 9 Z. ſtatt BE = $\frac{1}{2}$a l. m. DE = $\frac{1}{2}$b.

498 S. 9 Z. ſtatt $\sqrt{(2-1)}$ l. m. $\sqrt{2-1}$.

511 S. 14 Z. ſtatt $\sin\frac{2x}{a}$ l. m. $\sin x$.

Bey der 6ten Figur ſoll am Durchſchnittspuncte der Linien VX mit rr der Buchſtab r ſtehen.

Bey der 16ten Figur ſoll MT bis m verlängert werden.

Bey der 18ten Figur ſoll am andern Endpuncte der verlängerten Linie ac der Buchſtab b ſtehen.

Bey der 24ten Figur ſoll o ſtatt c zwiſchen d und C ſtehen.

Der

Der I. Abschnitt.

Beyträge zur Berichtigung und Erweiterung des im ersten Bande enthaltenen Unterrichts.

1. §.

Für alle Größen A, B, C, D, etc. ihre Anzahl $m+1$ mag wie immer groß angenommen werden, muß eine Zahl e möglich seyn, welche $Ae > Be^2+Ce^3+De^4+Ee^5+$ etc. geben würde.

Beweis. Es wird vorausgesetzt, daß A eine bejahte Größe ist, die übrigen Größen aber alle bejaht, oder einige bejaht, und andere verneint sind: wir wollen indessen annehmen, es seyen alle bejaht.

1. Unläugbar ist es, daß man sich eine Größe Z denken kann, welche größer ist, als jede einzeln genommene Größe A, B, C, D, E, etc.: möglich ist also eine Größe Z, für welche

$$Z(e^2+e^3+e^4+e^5+\text{etc.}) > Be^2+Ce^3+De^4+Ee^5+\text{etc.}$$

seyn würde. Denn es wird, wie überall in der Folge, so auch hier vorausgesetzt, daß, wenn auch die Größen A, B, C, D, etc. allmählig zunehmen, wie sie auf einander folgen, doch noch immer endliche Größen bleiben, solche nämlich, welche noch einer ferneren Zunahme fähig sind.

2. Da aber $m+1$, vermöge der Voraussetzung, die Anzahl der Größen A, B, C, D, E, etc. ist; so kann man den Ausdruck in (1) vollständig so angeben:

$$Z(e^2+e^3+e^4+\cdots+e^m+e^{m+1}) > Be^2+Ce^3+De^4+\text{etc.}$$

3. Es ist ferner, wie dieses aus der Natur der Multiplication erhellet,

$$(e^2+e^3+e^4+\cdots+e^m+e^{m+1})(1-e)=$$

$$=e^2-e^{m+2}=e^2(1-e^m): \text{ also ist}$$

$$e^2+e^3+\cdots+e^m+e^{m+1}=\frac{e^2(1-e^m)}{1-e}.$$

Demnach erhält man aus (2)

$$\frac{Ze^2(1-e^m)}{1-e} > Be^2+Ce^3+De^4+Ee^5+\text{etc.}$$

4. Nun ist, aus bekannten Gründen, für die Größen A, A+Z gewiß eine ganze Zahl n möglich, wofür ein Bruch von A+Z kleiner wäre als A, nämlich $(A+Z)\frac{1}{n} < A$: möglich ist also eine Zahl $e=\frac{1}{n}$, welche

$$(A+Z)e < A, \text{ daher } Ze < A(1-e)$$

mithin $\frac{Ze^2}{1-e} < Ae$ geben würde.

5. Endlich ist $1-e^m < 1$, folglich $Ze^2(1-e^m) < Ze^2$: also auch

$$\frac{Ze^2(1-e^m)}{1-e} < \frac{Ze^2}{1-e}.$$

Wegen (4) ist demnach

$$\frac{Ze^2(1-e^m)}{1-e} < Ae, \text{ und nun wegen (3)}$$

$$Ae > Be^2+Ce^3+De^4+Ee^5+\text{etc.}$$

6. Wenn

6. Wenn nicht alle Größen B, C, D, E. F, etc. bejaht sind, so werden einige unter den Producten Be^2, Ce^3, De^4, Ee^5, Fe^6 etc. bejaht, und die andern verneint seyn. Sey S die Summe aller bejahten, und $-s$ die Summe aller verneinten, mithin $S-s$ die Summe aller bejahten und verneinten Producte. Nun ist allemal $S > S-s$, und es muß, vermöge des für bejahte Producte bereits erwiesenen Lehrsatzes, eine Zahl e möglich seyn, welche $Ae > S$ geben würde: für dieselbe Zahl wäre also auch $Ae > S-s$.

2. §.

Für alle Größen A, B, C, D, etc., und für jede wie immer kleine gleichartige Größe μ muß eine Zahl möglich seyn, für welche die Summe der Producte aus verschiedenen Potenzen derselben Zahl in die einzelnen Größen A, B, C, D etc. kleiner ist, als die Größe μ.

Beweis. 1. Wir wollen indessen voraussetzen, daß alle Größen A, B, C, D, etc. bejaht sind, und bey dieser Voraussetzung darthun, es sey wirklich eine Zahl e, oder k möglich, welche $Ae + Be^2 + Ce^3 + \text{etc.} < \mu$, oder $Ak + Bk^2 + Ck^3 + \text{etc.} < \mu$ geben würde.

2. Es erhellet nämlich aus (1. §.), daß eine Zahl e möglich ist, welche $2Ae > Ae + Be^2 + Ce^3 + De^4 + \text{etc.}$ gäbe.

3. Es mag ferner μ eine wie immer kleine, und 2 A eine andere wie immer große Größe seyn; so muß doch, aus bekannten Gründen, eine ganze Zahl n möglich seyn,

wofür ein ntel von 2 A kleiner als μ wäre, nämlich $2A.\frac{1}{n} < \mu$: es ist daher eine Zahl $k=\frac{1}{n}$ möglich, welche $2Ak < \mu$ geben würde.

4. Nun aber ist in (2) (3) $e=k$, oder $e<k$, oder $e>k$. Ist wirklich $e=k$; so ist auch $2Ae=2Ak$, und $Ae+Be^2+Ce^3+De^4+\text{etc.}=Ak+Bk^2+Ck^3+Dk^4+\text{etc.}$; also wegen (3) (2) ist $Ak+Bk^2+Ck^3+Dk^4+\text{etc.} < \mu$, der Behauptung (1) gemäß.

Nimmt man aber an, es sey $e<k$; so ist $2Ae<2Ak$: also $2Ae<\mu$, wegen (3), und nun $Ae+Be^2+Ce^3+De^4+\text{etc.}<\mu$ in (2), zum Beweise von (1).

Ist endlich $e>k$; so ist auch $Be+Ce^2+De^3+\text{etc.}>Bk+Ck^2+Dk^3+\text{etc.}$: mithin, wegen $A>Be+Ce^2+De^3+\text{etc.}$ in (2), auch $A>Bk+Ck^2+Dk^3+\text{etc.}$ folglich $2Ak>Ak+Bk^2+Ck^3+Dk^4+\text{etc.}$, und nun $Ak+Bk^2+Ck^3+Dk^4+\text{etc.}<\mu$, wegen (3), welches der Beweis von (1) ist.

5. Seyen ferner einige unter den Größen A, B, C, D, etc. bejahte, und die andern verneint. Die Summe der Producte aus den bejahten Größen in gewisse Potenzen einer Zahl v sey S, und $-s$ die Summe der Producte aus den verneinten Größen in andere Potenzen der Zahl v, mithin sey $S-s$ die Summe der Producte aus allen bejahten und verneinten Größen in verschiedene Potenzen der Zahl v. Weil, vermöge des vorhergehenden Beweises, gewiß eine Zahl v möglich ist, wofür $S<\mu$ seyn würde, und allemal $S-s<S$ ist; so wäre für dieselbe Zahl auch $S-s<\mu$.

3. §.

Wenn z eine veränderliche Größe, und p, q, r, s, etc. beständige von z unabhängige Größen sind; so muß ein Werth von z möglich seyn, für welchen $pz > qz^2+rz^3+sz^4+$ etc., und $pz+qz^2+rz^3+sz^4+$ etc. $< \mu$ für jede wie immer kleine Größe μ seyn würde.

Beweis. Sey α was immer für eine beständige, mit z gleichartige Größe (etwa α eine gerade Linie von bestimmter Größe, und z eine ebenfalls gerade Linie von veränderlicher Länge). Da man nun der veränderlichen Größe z jeden Werth beylegen kann; so wird man $z=\alpha e$ für jede angenommene Zahl $e=\frac{1}{n}$ seßen können: wenn also p, q, r, s, etc. was immer für Größen sind, doch alle unabhängig von z; so wird eine Zahl $e=\frac{1}{n}$ möglich, mithin auch ein Werth αe von z möglich seyn, wofür $p\alpha.e > q\alpha^2.e^2 + r\alpha^3.e^3 + s\alpha^4.e^4 +$ etc., und $p\alpha.e + q\alpha^2.e^2 + r\alpha^3.e^3 + s\alpha^4.e^4 +$ etc. $< \mu$ (1. 2. §.), folglich auch $pz > qz^2 + rz^3 + sz^4 +$ etc., und $pz+qz^2+rz^3+sz^4+$ etc. $< \mu$ seyn würde.

4. §.

Wenn die Coefficienten Q, M, N, O, P, etc. von der veränderlichen Größe z nicht abhängen, und die Function $Q+Mz+Nz^2+Oz^3+Pz^4+$ etc. für jeden möglichen Werth von z gleich Null ist; so muß auch $Q=0$, und $M+Nz+Oz^2+Pz^3+$ etc. $=0$ seyn.

Beweis. Man kann diesen Satz als eine unmittelbare Folge aus (3. §.) betrachten.

1. Denn es kann zwar die veränderliche Größe z verschiedentlich zu- oder abnehmen, wobey aber Q, weil es

von z nicht abhängt, als beständig muß betrachtet werden: daher kann man annehmen, Q habe irgend einen bestimmten Werth, wenn nicht $Q=0$ ist.

2. Da also $Q=-(Mz+Nz^2+Oz^3+Pz^4+\text{etc.})$ seyn muß, sobald $Q+Mz+Nz^2+Oz^3+Pz^4+\text{etc.}=0$ ist; so wird auch $Mz+Nz^2+Oz^3+Pz^4+\text{etc.}$ entweder gleich Null seyn, oder irgend einen bestimmten, von z unabhängigen Werth haben, wegen (1): dieses kann aber, wegen (3. §.), nicht Statt finden; daher muß jenes angenommen, nämlich $Mz+Nz^2+Oz^3+Pz^4+\text{etc.}=0$, und nun auch $M+Nz+Oz^2+Pz^3+\text{etc.}=0$ gesetzt werden.

5. §.

Sind demnach bey einer analytischen Untersuchung gewisse, von der veränderlichen Größe z unabhängige Größen A, B, C, D, . . . a, b, c, d, . . . X, Z dergestalt beschaffen, daß für sie und jeden möglichen Werth von z

$$Z=X+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{etc.}$$

oder

$$Z+Az+Bz^2+Cz^3+\text{etc.}=X+az+bz^2+cz^3+\text{etc.}$$

ist; so müssen die Größen Z, X einander gleich seyn. Denn es ist bey dieser Voraussetzung

$$Z-X-Az-Bz^2-Cz^3-\text{etc.}=0$$

oder

$$Z-X+(A-a)z+(B-b)z^2+(C-c)z^3+(\text{etc.}-\text{etc.})=0:$$

also ist nach (4. §.) $Z-X=0$, daher $Z=X$.

6. §.

Wenn die Coefficienten A, B, C, D, etc. von der veränderlichen Größe z nicht abhängen, und eine

Fun-

Function von ihr, wie $A+Bz+Cz^2+Dz^3+ \ldots + Pz^{r-1}+Qz^r+Rz^{r+1}+ \ldots +Xz^n+$ etc. für jeden möglichen Werth von z gleich Null ist; so müssen alle Coefficienten A, B, C, D, . . . X, einzeln genommen gleich Null seyn.

Beweis. 1. Es ist $A=0$, und $B+Cz+Dz^2+ \ldots Xz^{n-1}=0$ (4. §.); und nun auch $B=0$, $C+Dz+ \ldots + Xz^{n-2}=0$ (4. §.); daher auch $C=0$ (4. §.)

2. Nimmt man ferner an, daß einige der ersten Coefficienten, etwa A, B, C, . . . P, wirklich gleich Null sind; so wird bey $A+Bz+Cz^2+ \ldots +Pz^{r-1}+Qz^r+Rz^{r+1}+ \ldots +Xz^n+$ etc. $=0$, auch $Qz^r+Rz^{r+1}+ \ldots +Xz^n+$ etc. $=0$, mithin $Q+Rz+ \ldots +Xz^{n-r}=0$, Folglich $Q=0$ (4. §.) seyn müssen.

Aus (1) (2) erhellet demnach die Richtigkeit des Lehrsatzes ganz allgemein nach (I. Band. 54. §.).

7. §.

Wenn demnach zwo Functionen $A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ etc. $a+bz+cz^2+dz^3+$ etc. für jeden möglichen Werth der veränderlichen Größe z einander gleich seyn sollen; so müssen auch die zu gleichen Potenzen von z gehörigen Coefficienten, A und a, B und b, C und c, D und d, etc. einander gleich seyn: denn aus $A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ etc. $=a+bz+cz^2+dz^3+$ etc. folgt $A-a+(B-b)z+(C-c)z^2+(D-d)z^3+$ etc. $=0$; daher $A-a=0$, $B-b=0$, $C-c=0$, $D-d=0$, etc. und nun $A=a$, $B=b$, $C=c$, $D=d$, etc.

8. §.

Wenn für gewiſſe beſtimmte Werthe von Z, X zwo Größen U, V dergeſtalt beſchaffen ſind, daß jede einzeln genommen kleiner werden kann, als jede denkbare wie immer kleine gleichartige Größe; wenn ferner für alle mögliche Werthe der Größen U, V ſowohl $Z > X \pm U$, als $Z < X \pm V$ iſt; ſo müſſen die Größen Z, X einander gleich ſeyn.

Beweis. Zuerſt müſſen wir unterſuchen, ob alle hier angegebenen Bedingungen möglich ſind, ob es nicht vielmehr darunter einige unmögliche giebt.

Nimmt man $Z < X - V$ an; ſo iſt $Z < X$, und ſo auch $Z < X + U$: die Bedingungen $Z > X + U$ und $Z < X - V$ können alſo nicht zugleich beſtehen.

Wäre ferner $Z > X + U$; ſo wäre auch $Z > X$: zwiſchen den beſtimmten Größen Z, X müßte es alſo eine beſtimmte Differenz $Z - X$ geben. Da aber, vermöge der Vorausſetzung, V kleiner werden kann, als jede denkbare, wie immer kleine Größe; ſo könnte $V < Z - X$ werden, mithin $Z > X + V$. Man kann demnach nicht annehmen, daß die Bedingungen $Z > X + U$ und $Z < X + V$ für alle mögliche Werthe von U, V zugleich beſtehen.

Hieraus erhellet, daß beym aufgeſtellten Lehrſatze nur folgende Bedingungen Statt haben können.

I. $Z > X - U$ und zugleich $Z < X + V$.

II. $Z > X - U$ und zugleich $Z < X - V$.

Daß nun weder die Bedingungen in I.) noch die in II.) zugleich beſtehen können, wenn nicht Z, X gleiche Größen ſind, erhellet ſo:

Sey

Sey $Z > X$; so ist schon deswegen die Bedingung $Z < X - V$ in II.) unmöglich. Es muß ferner, wenn $Z > X$ ist, eine bestimmte Differenz $Z - X$ da seyn, und, vermöge der Voraussetzung, ein Werth von V, wofür $V < Z - X$ seyn würde: also kann, wenn $Z > X$ ist, die Bedingung $Z < X + V$ in I.) nicht für jeden möglichen Werth von V bestehen.

Setzt man aber $Z < X$; so muß es eine bestimmte Differenz $X - Z$, und, vermöge der Voraussetzung, nun einen Werth von U geben, wofür $U < X - Z$ wäre: also nicht allemal $Z > X - U$, wie dieses nach I.) II.) geschehen soll.

9. §.

Wenn die Größen $Z, X, f, g, h, \ldots \alpha, \beta, \gamma$, etc. eigene, von der veränderlichen Größe z unabhängige Werthe haben, und man findet, daß für alle mögliche Werthe der veränderlichen Größe z sowohl

$$Z > X + fz + gz^2 + hz^3 + \text{etc.}$$

als $Z < X + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc.}$

ist; so müssen die Größen Z, X einander gleich seyn (8. 3. §.).

10. §.

Aus diesen wenigen Sätzen läßt sich die gesammte analytische Gränzenlehre ableiten. Sie kommen schon in beyden Bänden des Unterrichtes in der mathematischen Analysis zerstreut vor: hier habe ich sie beysammen in ihrem natürlichen Zusammenhange aufzustellen, und die Gründe, worauf sie beruhen, bündiger zu erörtern gesucht, als es bey

jenem Unterrichte geschehen ist. Nun will ich einige Beyspiele beybringen, welche den Gebrauch, den man davon bey den wichtigsten analytischen Untersuchungen machen kann, genugsam erläutern werden: Folgende Abschnitte werden neue Beweise von der ausgedehnten Brauchbarkeit derselben Sätze enthalten.

Bey Allen Untersuchungen, wovon hier die Rede ist, kömmt folgender allgemeine Satz vor:

Wenn a, b, c, d, etc. von z unabhängige Größen sind, und r eine ganze bejahte Zahl bedeutet; so müssen andere von z unabhängige Größen α, β, γ, etc. möglich seyn, wofür die rte Potenz von $a+bz+cz^2+dz^3+$etc. einer Reihe von der Form $a^r+ra^{r-1}bz+\alpha z^2+\beta z^3+$etc. gleich ist.

Mehr braucht man hier von einer solchen Potenz nicht zu wissen: von der Möglichkeit aber der Größen α, β, γ, etc. kann man sich, unabhängig vom binomischen Lehrsatze, aus folgenden Gründen überzeugen.

1. Wenn M, N, O, . . . p, q, r, etc. von z unabhängige Größen sind; so muß, wie es aus der Natur der Multiplication erhellet, das Product aus $M+Nz+Oz^2+$etc. in $p+qz+rz^2+$etc., für gewisse von z unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. einer Reihe von der Form $Mp+(Mq+Np)z+\alpha z^2+\beta z^3+\gamma z^4+$etc. gleich seyn.

2. Daher, für $Z=a+bz+cz^2+$etc., giebt es eine Reihe $Z^2=Z.Z=a^2+2abz+\alpha z^2+\beta z^3+$etc. wegen (1).

3. Und, wenn für irgend eine ganze bejahte Zahl n man $Z^n=a^n+na^{n-1}bz+uz^2+vz^3+$etc. setzt; so ist

Z^{n+1}

und nun

$$z = aA + 2bAy + 3cAy^2 + 4dAy^3 + \ldots + rpAy^{r-1} + (r+1)qAy^r + \text{etc.} + \alpha z e + \beta z e^2 + \gamma z e^3 + \text{etc.}$$

5. Die Reihen in (1) (4) müssen für jeden aliquoten Theil e von z in (2) einander gleich seyn: nach (5. §.) erhält man also aus (1)(4) folgende Gleichung:

$$1 + ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \ldots + py^r + qy^{r+1} + \text{etc.} = aA + 2bAy + 3cAy^2 + 4dAy^3 + \ldots + rpAy^{r-1} + (r+1)qAy^r + \text{etc.}$$

Daher hat man nach (7. §.)

$aA = 1$	$a = \frac{1}{A}$
$2bA = a$	$b = \frac{1}{2.A^2}$
$3cA = b$	$c = \frac{1}{2.3.A^3}$
$4dA = c$	$d = \frac{1}{2.3.4.A^4}$
$\vdots$	$\vdots$
$(r+1)qA = p$	$q = p \cdot \frac{1}{(r+1)A}$.

Für diese Werthe wird also die Gleichung in (1) allemahl bestehen, oder es wird seyn:

$$z = 1 + \frac{y}{A} + \frac{y^2}{2A^2} + \frac{y^3}{2.3.A^3} + \frac{y^4}{2.3.4.A^4} + \ldots\ldots + \frac{y^{r+1}}{2.3\ldots(r+1)A^{r+1}}.$$

Nämlich:

$$z = 1 + \frac{lz}{A} + \frac{(lz)^2}{2A^2} + \frac{(lz)^3}{2.3.A^3} + \frac{(lz)^4}{2.3.4.A^4} + \ldots\ldots + \frac{(lz)^{r+1}}{2.3.4\ldots(r+1)A^{r+1}}.$$

17. §.

Wenn b die Grundzahl des logarithmischen Systems (in 16. §.) bedeutet, und man $z=b$ setzt; so ist $lz=lb=1$ (I. Band. 134. §. 1. Zusatz): also ist in (16. §.) die Grundzahl:

$$b=1+\frac{1}{A}+\frac{1}{2A^2}+\frac{1}{2.3A^3}+\frac{1}{2.3.4A^4}+\frac{1}{2.3.4.5A^5}+\text{etc.}$$

18. §.

Bey jedem logarithmischen Systeme giebt es demnach, außer seiner Grundzahl b, noch eine durch dieselbe Grundzahl vollkommen bestimmte Zahl A (15. §.), von welcher der Logarithme jeder Zahl $1+x$ dergestalt abhängt, daß man, um ihn zu erhalten, nur die von x abhängige Reihe $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\text{etc.}=S$ mit eben der Zahl A zu multipliciren braucht. Diese Zahl A heißt der Modul des logarithmischen Systems, und darnach wird jedes System ein künstliches System genannt, wenn sein Modul größer ist, oder kleiner als A; hingegen wird es das natürliche System genannt, wenn der Modul $=1$ ist. Es ist aber unter allen künstlichen Systemen das der gemeinen Logarithmen, welches auf der Grundzahl 10 beruhet, am merkwürdigsten.

19. §.

Für die natürlichen Logarithmen hat man demnach in (18. 16. 14. 13. 12. §.) folgende Reihen:

$$z=1+lz+\frac{(lz)^2}{2}+\frac{(lz)^3}{2.3}+\frac{(lz)^4}{2.3.4}+\ldots+\frac{(lz)^n}{2.3\ldots n}\cdot$$

$$L\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\cdot$$

L(1−x)

$$L(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right).$$

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \pm \frac{x^n}{n}.$$

20. §.

Bedeutet $b = e$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen; so ist nach (18. 17. §.)

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \text{etc.}$$

Mithin $e = 2{,}71828182$ etc.

21. §.

Und für $b = 10$ erhält man den Modul der gemeinen Logarithmen nach (18. 15. §.) wie folgt:

$$A = \frac{1}{2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.11^3} + \frac{9^5}{5.11^5} + \frac{9^7}{7.11^7} + \text{etc.}\right)}.$$

Daher $A = 0{,}43429448$ etc.

Und $\frac{1}{A} = 2{,}30258509$ etc.

22. §.

Wenn Y, y die Logarithmen sind, welche einer Zahl $u = 1 + x$ bey zweyen Systemen zugehören, deren Moduln A, a seyn mögen; so ist $Y = AS$, und $y = aS$ (18. §.): also $Y : y = A : a$, das heißt: die bey zweyen Systemen einer jeden Zahl u zugehörigen Logarithmen verhalten sich gegen einander gerade wie die Moduln derselben Systeme.

23. §.

Wenn demnach die Bezeichnungen ln.u, lg.u den natürlichen und gemeinen Logarithmen einer Zahl u bedeuten, und A den Modul der gemeinen Logarithmen ausdrückt; so ist nach (18. 22. §.)

ln.u : lg.u = 1 : A, daher

$$\ln.u = \lg.u \times \frac{1}{A}, \text{ und } \lg.u = A \times \ln.u.$$

Aus den gemeinen Logarithmen gewisser Zahlen wird man demnach ihre natürlichen Logarithmen ableiten, wenn man jene durch ihren Modul A dividirt, oder mit dem Bruche $\frac{1}{A}$ multiplicirt (21. §.): aus den natürlichen Logarithmen gewisser Zahlen erhält man hingegen die gemeinen Logarithmen derselben Zahlen, wenn man jene mit dem Modul A der gemeinen Logarithmen (21. §.) multiplicirt.

24. §.

Und wenn man überhaupt durch lk.u den Logarithmen einer Zahl u in was immer für einem künstlichen Systeme verstehet, dessen Modul A seyn mag; so ist, wie in (23. §.)

ln.u : lk.u = 1 : A.

Wäre nun u = e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen; so hätte man ln.u = ln.e = 1 (I. Band. 134. §. 1. Zus.) mithin 1 : lk.e = 1 : A, und nun A = lk.e. Also ist der Modul eines jeden künstlichen Systems, durch den bey demselben Systeme der Grundzahl der natürlichen Logarithmen zugehörigen Logarithmen bestimmt.

25. §.

25. §.

Und wenn $u = 10$ die Grundzahl der gemeinen Logarithmen ist, mithin $lg.10 = 1$ (I. Band. 134. §. 1. Zus.); so ist $ln.10 : 1 = 1 : A$ (22. §.), daher $A = \frac{1}{ln.10}$, das heißt: die Einheit dividirt durch den natürlichen Logarithmen von 10, giebt den Modul der gemeinen Logarithmen.

26. §.

Auf diesem Wege lassen sich demnach die logarithmischen Reihen mit mehr Evidenz und Bündigkeit erfinden, als auf dem im ersten Bande eingeschlagenen. Man kann nun auch die daselbst enthaltene Lehre von der Berechnung der Logarithmen folgendermaßen berichtigen. Es ist nämlich im ersten Bandes 138sten §. nicht μ, sondern $\frac{1}{\mu}$ der Modul des logarithmischen Systems. Daher ist auch im dortigen 138. §. 2. Zusatz, nicht μ, sondern $\frac{1}{\mu}$ der Modul der gemeinen Logarithmen, welcher also, wie oben A in (21. §.), muß bestimmt werden. Und nun muß man statt des dortigen Satzes in 138. §. 3. Zus., den obigen (22. §.) nehmen, und darnach auch den dortigen 4ten Zusatz in 138. §. verbessern.

Bey dieser Gelegenheit bemerke ich, daß solche Fehler sich auch in einigen später erschienenen Schriften befinden, z. B. beym H. L'Huilier [a], und Leiste [b]: jener nimmt in 58. bis 63. §. exclusive A für den Modul, da doch bey ihm $\frac{1}{A}$ der Modul ist: dieser hält in 112. §. K für den Modul, da er doch $\frac{1}{K}$ seyn muß.

(a) Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris etc. Tubingae. 1795.

(b) Die Arithmetik und Algebra. ꝛc. Wolfenbüttel. 1790.

Daraus erhält man nach (6. §.).

$$\begin{array}{rcl|l} 2B & + & A = 0 & B = -\frac{1}{2}A \\ 3C & + & 2B = 0 & C = +\frac{1}{3}A \\ 4D & + & 3C = 0 & D = -\frac{1}{4}A \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (r+1)Q & + & rP = 0 & Q = -P\frac{r}{r+1} \end{array}$$

Für diese Werthe von A, B, C, etc. wird also die Gleichung in (1) allemahl Statt finden: sie giebt nämlich

$$L(1+x) = A\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \text{etc.}\right).$$

13. §.

Für $-x$ statt x in (12. §.) erhält man $L(1-x)$, wie folgt:

$$L(1-x) = -A\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \text{etc.}\right).$$

14. §.

Ziehet man die Gleichung in (13. §.) von der Gleichung in (12. §.) ab, weil nach (I. Band. 135. §.) $L(1+x) - L(1-x) = L\frac{1+x}{1-x}$ ist; so findet man

$$L\frac{1+x}{1-x} = 2A\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \text{etc.}\right).$$

15. §.

15. §.

Das Bisherige gilt für jedes mögliche logarithmische System, und es kann $\frac{1+x}{1-x}$ jeder Zahl gleich gesetzt werden: bedeutet also b die Grundzahl des Systems, und setzt man $\frac{1+x}{1-x}=b$; so ist $L\frac{1+x}{1-x}=Lb=1$ (I. Band. 134. §. 1. Zusatz.) und man findet $x=\frac{b-1}{b+1}$. Die Gleichung im (14. §.) giebt daher:

$$1=2A\left(\frac{b-1}{b+1}+\frac{(b-1)^3}{3(b+1)^3}+\frac{(b-1)^5}{5(b+1)^5}+\ldots\ldots+\frac{(b-1)^{2n+1}}{(2n+1)(b+1)^{2n+1}}\right);$$

mithin ist

$$A=\frac{1}{2\left(\frac{b-1}{b+1}+\frac{(b-1)^3}{3(b+1)^3}+\frac{(b-1)^5}{5(b+1)^5}+\ldots+\frac{(b-1)^{2n+1}}{(2n+1)(b+1)^{2n+1}}\right)}.$$

16. §.

Auf eine ähnliche Art kann man auch die Zahl z finden, welche einem Logarithmen y zugehört.

1. Man nehme nämlich an, für jeden Werth von y sey:

$$z=1+ay+by^2+cy^3+\ldots+py^r+qy^{r+1}+\text{etc.}$$

2. Da nun in jedem Systeme verschiedene Logarithmen mit verschiedenen Zahlen in Verbindung stehen; so muß, wenn e was immer für einen aliquoten Theil von z bedeutet, der Zahl z+e ein Logarithme y+ω zugehören, und dafür ist nach (1):

$$z+e=1+a(y+\omega)+b(y+\omega)^2+c(y+\omega)^3+d(y+\omega)^4 + \ldots + p(y+\omega)^r+q(y+\omega)^{r+1}+\text{etc.}$$

3. Da aber $y=Lz$ und $y+\omega=L(z+e)$ war, mithin $\omega=L(z+e)-Lz=L\left(1+\frac{e}{z}\right)$ seyn muß (I. Band. 135. §.); so hat man nach (12. §.)

$$\omega=\frac{Ae}{z}-\frac{Ae^2}{2z^2}+\frac{Ae^3}{3z^3}-\frac{Ae^4}{4z^4}+\text{etc.}$$

und bey diesem Ausdrucke enthält jedes folgende Glied eine höhere Potenz von e.

4. Wegen (3) müssen daher gewisse, von e unabhängige Coefficienten k, l, m, n, etc. möglich seyn, für welche jede Potenz $(y+\omega)^r$ einer Reihe von der Form $y^r+\frac{rAe}{z}y^{r-1}+ke^2+le^3+me^4+\text{etc.}$ gleich ist (10. §.): also müssen andere von e unabhängige Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. möglich seyn, für welche die Gleichung in (2) sich in folgende würde verwandeln lassen:

$$z+e=1+ay+by^2+cy^3+\ldots+qy^{r+1}+\text{etc.} + \left(\frac{aA}{z}+\frac{2bA}{z}y+\frac{3cA}{z}y^2+\frac{4dA}{z}y^3+\ldots\ldots + \frac{rpA}{z}y^{r-1}+\frac{(r+1)qA}{z}y^r+\text{etc.}\right)e + \alpha e^2+\beta e^3+\gamma e^4+\text{etc.}$$

Wegen (1) wäre demnach

$$e=\left(\frac{aA}{z}+\frac{2bA}{z}y+\frac{3cA}{z}y^2+\frac{4dA}{z}y^3+\ldots\ldots + \frac{rpA}{z}y^{r-1}+\frac{(r+1)qA}{z}y^r+\text{etc.}\right)e + \alpha e^2+\beta e^3+\gamma e^4+\text{etc.};$$

und

und nun

$$z = aA + 2bAy + 3cAy^2 + 4dAy^3 + \ldots + rpAy^{r-1} + (r+1)qAy^r + \text{etc.} + \alpha z o + \beta z e^2 + \gamma z e^3 + \text{etc.}$$

5. Die Reihen in (1) (4) müssen für jeden aliquoten Theil e von z in (2) einander gleich seyn: nach (5. §.) erhält man also aus (1)(4) folgende Gleichung:

$$1 + ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \ldots + py^r + qy^{r+1} + \text{etc.} = aA + 2bAy + 3cAy^2 + 4dAy^3 + \ldots + rpAy^{r-1} + (r+1)qAy^r + \text{etc.}$$

Daher hat man nach (7. §.)

$aA = 1$	$a = \frac{1}{A}$
$2bA = a$	$b = \frac{1}{2.A^2}$
$3cA = b$	$c = \frac{1}{2.3.A^3}$
$4dA = c$	$d = \frac{1}{2.3.4.A^4}$
$(r+1)qA = p$	$q = p \cdot \frac{1}{(r+1)A}$.

Für diese Werthe wird also die Gleichung in (1) allemahl bestehen, oder es wird seyn:

$$z = 1 + \frac{y}{A} + \frac{y^2}{2A^2} + \frac{y^3}{2.3.A^3} + \frac{y^4}{2.3.4.A^4} + \ldots\ldots + \frac{y^{r+1}}{2.3\ldots(r+1)A^{r+1}}.$$

Nämlich:

$$z = 1 + \frac{lz}{A} + \frac{(lz)^2}{2A^2} + \frac{(lz)^3}{2.3.A^3} + \frac{(lz)^4}{2.3.4.A^4} + \ldots\ldots + \frac{(lz)^{r+1}}{2.3.4\ldots(r+1)A^{r+1}}.$$

17. §.

Wenn b die Grundzahl des logarithmischen Systems (in 16. §.) bedeutet, und man $z=b$ setzt; so ist $lz=lb=1$ (I. Band. 134. §. 1. Zusatz): also ist in (16. §.) die Grundzahl:

$$b=1+\frac{1}{A}+\frac{1}{2A^2}+\frac{1}{2.3A^3}+\frac{1}{2.3.4A^4}+\frac{1}{2.3.4.5A^5}+\text{etc.}$$

18. §.

Bey jedem logarithmischen Systeme giebt es demnach, außer seiner Grundzahl b, noch eine durch dieselbe Grundzahl vollkommen bestimmte Zahl A (15. §.), von welcher der Logarithme jeder Zahl $1+x$ dergestalt abhängt, daß man, um ihn zu erhalten, nur die von x abhängige Reihe $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\text{etc.}=S$ mit eben der Zahl A zu multipliciren braucht. Diese Zahl A heißt der Modul des logarithmischen Systems, und darnach wird jedes System ein künstliches System genannt, wenn sein Modul größer ist, oder kleiner als A; hingegen wird es das natürliche System genannt, wenn der Modul $=1$ ist. Es ist aber unter allen künstlichen Systemen das der gemeinen Logarithmen, welches auf der Grundzahl 10 beruhet, am merkwürdigsten.

19. §.

Für die natürlichen Logarithmen hat man demnach in (18. 16. 14. 13. 12. §.) folgende Reihen:

$$z=1+lz+\frac{(lz)^2}{2}+\frac{(lz)^3}{2.3}+\frac{(lz)^4}{2.3.4}+\ldots+\frac{(lz)^n}{2.3\ldots n}\cdot$$

$$L\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\cdot$$

L(1−x)

$$L(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right).$$

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \pm \frac{x^n}{n}.$$

20. §.

Bedeutet $b = e$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen; so ist nach (18. 17. §.)

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \text{etc.}$$

Mithin $e = 2{,}71828182$ etc.

21. §.

Und für $b = 10$ erhält man den Modul der gemeinen Logarithmen nach (18. 15. §.) wie folgt:

$$A = \frac{1}{2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.11^3} + \frac{9^5}{5.11^5} + \frac{9^7}{7.11^7} + \text{etc.}\right)}.$$

Daher $A = 0{,}43429448$ etc.

Und $\frac{1}{A} = 2{,}30258509$ etc.

22. §.

Wenn Y, y die Logarithmen sind, welche einer Zahl $u = 1 + x$ bey zweyen Systemen zugehören, deren Moduln A, a seyn mögen; so ist $Y = AS$, und $y = aS$ (18. §.): also $Y : y = A : a$, das heißt: die bey zweyen Systemen einer jeden Zahl u zugehörigen Logarithmen verhalten sich gegen einander gerade wie die Moduln derselben Systeme.

23. §.

Wenn demnach die Bezeichnungen ln.u, lg.u den natürlichen und gemeinen Logarithmen einer Zahl u bedeuten, und A den Modul der gemeinen Logarithmen ausdrückt; so ist nach (18. 22. §.)

$$ln.u : lg.u = 1 : A, \text{ daher}$$

$$ln.u = lg.u \times \frac{1}{A}, \text{ und } lg.u = A \times ln.u.$$

Aus den gemeinen Logarithmen gewisser Zahlen wird man demnach ihre natürlichen Logarithmen ableiten, wenn man jene durch ihren Modul A dividirt, oder mit dem Bruche $\frac{1}{A}$ multiplicirt (21. §.): aus den natürlichen Logarithmen gewisser Zahlen erhält man hingegen die gemeinen Logarithmen derselben Zahlen, wenn man jene mit dem Modul A der gemeinen Logarithmen (21. §.) multiplicirt.

24. §.

Und wenn man überhaupt durch lk.u den Logarithmen einer Zahl u in was immer für einem künstlichen Systeme verstehet, dessen Modul A seyn mag; so ist, wie in (23. §.)

$$ln.u : lk.u = 1 : A.$$

Wäre nun u = e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen; so hätte man ln.u = ln.e = 1 (I. Band. 134. §. 1. Zus.) mithin 1 : lk.e = 1 : A, und nun A = lk.e. Also ist der Modul eines jeden künstlichen Systems, durch den bey demselben Systeme der Grundzahl der natürlichen Logarithmen zugehörigen Logarithmen bestimmt.

25. §.

25. §.

Und wenn $u = 10$ die Grundzahl der gemeinen Logarithmen ist, mithin $lg.10 = 1$ (I. Band. 134. §. 1. Zus.); so ist $ln.10 : 1 = 1 : A$ (22. §.), daher $A = \frac{1}{ln.10}$, das heißt: die Einheit dividirt durch den natürlichen Logarithmen von 10, giebt den Modul der gemeinen Logarithmen.

26. §.

Auf diesem Wege lassen sich demnach die logarithmischen Reihen mit mehr Evidenz und Bündigkeit erfinden, als auf dem im ersten Bande eingeschlagenen. Man kann nun auch die daselbst enthaltene Lehre von der Berechnung der Logarithmen folgendermaßen berichtigen. Es ist nämlich im ersten Bandes 138sten §. nicht μ, sondern $\frac{1}{\mu}$ der Modul des logarithmischen Systems. Daher ist auch im dortigen 138. §. 2. Zusatz, nicht μ, sondern $\frac{1}{\mu}$ der Modul der gemeinen Logarithmen, welcher also, wie oben A in (21. §.), muß bestimmt werden. Und nun muß man statt des dortigen Satzes in 138. §. 3. Zus., den obigen (22. §.) nehmen, und darnach auch den dortigen 4ten Zusatz in 138. §. verbessern.

Bey dieser Gelegenheit bemerke ich, daß solche Fehler sich auch in einigen später erschienenen Schriften befinden, z. B. beym H. L'Huilier [a], und Leiste [b]: jener nimmt in 58. bis 63. §. exclusive A für den Modul, da doch bey ihm $\frac{1}{A}$ der Modul ist: dieser hält in 112. §. K für den Modul, da er doch $\frac{1}{K}$ seyn muß.

(a) Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris etc. Tubingae. 1795.

(b) Die Arithmetik und Algebra. ꝛc. Wolfenbüttel. 1790.

27. §.

Was die wirkliche Berechnung der natürlichen und gemeinen Logarithmen anbelangt, so ist sie im ersten Bande, von dem dortigen 5ten Zusatze des 138sten §. an, bis zum Ende des Abschnittes ganz richtig erklärt worden. Die daselbst in (139. §.) angegebene Formul ist eben die, welche gewöhnlich zur Berechnung der Logarithmen vorgeschrieben wird: statt ihrer würde ich die im 1sten Zusatze darauf folgende Formul, als welche ungemein vortheilhafter ist, allemahl empfehlen, selbst zur Berechnung der Logarithmen für die zehn ersten Zahlen.

1. Wenn man die Brüche $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, etc. in Decimalbrüche verwandelt; so kann man den natürlichen Logarithmen jeder Primzahl A so ausdrücken:

$$\text{Log. nat. } A = \tfrac{1}{2}(l(A+1)+l(A-1)) + \frac{1{,}000000000\ \text{etc.}}{2A^2-1} + \frac{0{,}3333333333\ \text{etc.}}{(2A^2-1)^3} + \frac{0{,}2000000000\ \text{etc.}}{(2A^2-1)^5} + \frac{0{,}1428571428\ \text{etc.}}{(2A^2-1)^7} + \frac{0{,}1111111111\ \text{etc.}}{(2A^2-1)^9} + \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

2. Wenn man aber die Formul in (I. Band. 139. §. 1. Zus.) mit 0,4342944819 multiplicirt, dann diese Zahl durch die einzelnen Zahlen 2, 3, 5, 7, 9, etc. dividirt;

so

so erhält man daraus folgende Formul für die gemeinen Logarithmen der Primzahlen A.

$$\text{Log. vulg. } A = 0{,}2171472409\,(l(A+1)+l(A-1))$$
$$+\ \frac{0{,}4342944819}{2A^2-1}$$
$$+\ \frac{0{,}1447648273}{(2A^2-1)^3}$$
$$+\ \frac{0{,}0868588963}{(2A^2-1)^5}$$
$$+\ \frac{0{,}0620420688}{(2A^2-1)^7}$$
$$+\ \frac{0{,}0482549424}{(2A^2-1)^9}$$
$$+ \text{ etc. etc.}$$

3. Es verstehet sich, daß diese Formuln desto genauer sind, jemehr Decimalziffern man dazu nimmt. Setzt man nun $\frac{1+x}{1-x} = 2$; so ist $x = \frac{1}{3}$, daher Log. nat. $2 = 2\,(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} + \frac{1}{11.3^{11}} + \text{etc.})$ nach (19. §.). Auf diese Art kann man den natürlichen Logarithmen von 2 aufsuchen: multiplicirt man ihn hierauf mit 0,43429448 etc. so erhält man zum Product den gemeinen Logarithmen von 2.

Hat man diese Logarithmen gefunden; so kann man dadurch sowohl die natürlichen, als die gemeinen Logarithmen mit Hülfe der vorhergehenden Formuln (1) (2) ganz leicht berechnen; etwa die natürlichen nach (1) so:

Weil l2 bekannt ist; so erhält man dadurch auch $l4=2l2=l2+l2$; und $l8=3l2=l4+l2$. Ferner für $A=3$, daher $2A^2-1=2.9-1=17$, erhält man l3 durch l4 und l2: und nun findet man $l6=l3+l2$; $l9=2l3$. Setzt man ferner $A=5$, daher $2A^2-1=2.25-1=49$; so wird man l5 durch l6 und l4 bestimmen; hernach für $A=7$, $2A^2-1=2.49-1=97$, auch l7 durch l8 und l6. Eben so kann man fortfahren, die Logarithmen der Primzahlen 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, u. s. f. zu suchen.

4. Es ist übrigens einleuchtend, daß für grössere Primzahlen man immer weniger Glieder bey (1) (2) zu nehmen braucht, um ihre Logarithmen bis auf etliche Decimalstellen genau zu berechnen.

Ich will annehmen, man wolle den natürlichen Logarithmen einer ganzen, zwischen 100 und 1000 liegenden dreystelligen Zahl $\alpha\beta\gamma=A$ wissen. Weil $A^2=(\alpha\beta\gamma)^2$ wenigstens 5, mithin auch $2A^2-1$ wenigstens 5 Ziffern haben muß; so wird $(2A^2-1)^3$ wenigstens 13 Ziffern haben: also werden die zwey ersten Glieder der obigen Reihe (1) hinreichen, den natürlichen Logarithmen einer solchen Zahl bis auf 7 Decimalstellen genau zu bestimmen: und wenn man noch das dritte Glied dazu nimmt: so wird man dadurch jenen Logarithmen bis auf 13 Decimalstellen genau berechnen können.

28. §.

Um noch eine Probe des vortheilhaften Gebrauchs der vorhergehenden Theorie bey der Erfindung der Reihen für

für gewisse Functionen zu geben, will ich die Reihen für Sin φ und Cosin φ suchen, welche im ersten Bandes 158sten §. auf einem andern weniger überzeugenden Wege bestimmt worden.

1. Man nehme an, ω sey was immer für ein aliquoter Theil des Kreisbogens φ; so hat man, nach (I. Band. 156. §.).

$$\text{Sin}(\varphi+\omega) = \text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos}\,\omega + \text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}\,\omega.$$
$$\text{Cos}(\varphi+\omega) = \text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,\omega - \text{Sin}\,\varphi\,\text{Sin}\,\omega.$$

2. Nun sollen die Coefficienten B, C, D, etc. dergestalt beschaffen seyn, daß für sie und jeden möglichen Kreisbogen φ folgende Gleichung Statt finde.

$$\text{Sin}\,\varphi = \varphi + B\varphi^2 + C\varphi^3 + D\varphi^4 + \ldots + P\varphi^{2n} + Q\varphi^{2n+1} + R\varphi^{2n+2} + S\varphi^{2n+3} + \text{etc.}$$

Da Cosin φ von Sin φ abhängt; so ist gewiß durch diese Reihe, auch die Reihe für Cosin φ bestimmt, dergestalt, daß diese aus jener nach einem bestimmten Gesetze sich ableiten läßt: am bequemsten wird man sie so finden.

3. Wegen 2 ist auch $\text{Sin}\,\omega = \omega + B\omega^2 + C\omega^3 + D\omega^4 + E\omega^5 + \text{etc.}$

4. Also müssen gewisse von ω unabhängige Coefficienten k, l, m, etc. möglich seyn, für welche man $\text{Sin}\,\omega^2 = \omega^2 + k\omega^3 + l\omega^4 + m\omega^5 + \text{etc.}$ in (3) erhalten würde: und eben deswegen müssen andere von ω unabhängige Coefficienten u, v, x, möglich seyn, für welche $\text{Cosin}\,\omega = (1 - \text{Sin}\,\omega^2)^{\frac{1}{2}}$ sich in folgende Reihe würde verwandeln lassen (10. 11. §.):

$$\text{Cosin}\,\omega = 1 + u\omega^2 + v\omega^3 + x\omega^4 + \text{etc.}$$

5. Aus

5. Aus (1) (3) (4) erhält man:

$$\text{Sin}(\varphi+\omega) = \text{Sin}\,\varphi + u\,\text{Sin}\,\varphi.\omega^2 + v\,\text{Sin}\,\varphi.\omega^3 + \text{etc.}$$
$$+ \text{Cof}\,\varphi.\omega + B\,\text{Cof}\,\varphi.\omega^2 C\,\text{Cof}\,\varphi.\omega^3 + \text{etc.}$$

6. Ferner wegen (2) soll auch folgende Gleichung bestehen:

$$\text{Sin}(\varphi+\omega) = \varphi+\omega+B(\varphi+\omega)^2+C(\varphi+\omega)^3+D(\varphi+\omega)^4$$
$$+ \text{- - -} + P(\varphi+\omega)^{2n} + Q(\varphi+\omega)^{2n+1} + R(\varphi+\omega)^{2n+2}$$
$$+ S(\varphi+\omega)^{2n+3} + \text{etc.}$$

Weil aber jede mte Potenz von $\varphi+\omega$ eine Reihe von der Form $\varphi^m + m\varphi^{m-1}.\omega + \alpha\omega^2 + \beta\omega^3 + \gamma\omega^4 + \text{etc.}$ giebt, wobey α, β, γ, etc. von ω gar nicht abhängen (10. §.); so ist klar, daß andere von ω unabhängige Coefficienten a, b, c, etc. möglich seyn müssen, für welche die vorige Reihe sich in folgende verwandeln läßt:

$$\text{Sin}(\varphi+\omega) = \varphi + B\varphi^2 + C\varphi^3 + \text{- - -} + S\varphi^{2n+3}$$
$$+ \omega(1 + 2B\varphi + 3C\varphi^2 + 4D\varphi^3 + \text{- - -}$$
$$+ 2nP\varphi^{2n-1} + (2n+1)Q\varphi^{2n} + (2n+2)R\varphi^{2n+1}$$
$$+ (2n+3)S\varphi^{2n+2}) + a\omega^2 + b\omega^3$$
$$+ c\omega^4 + \text{etc.}$$

7. Die Reihen (6) (5) müssen einander gleich seyn; überdem ist, wegen (2), der von ω unabhängige Theil der Reihe (5) dem von ω unabhängigen Theile der Reihe (6) gleich: also ist auch der übrige Theil der Reihe (5) dem anderen Theile der Reihe (6) gleich; daher werden dieselben Theile, durch ω dividirt, folgende Gleichung geben:

u Sin

$$u \operatorname{Sin}\varphi.\omega + v \operatorname{Sin}\varphi.\omega^2 + \text{etc.} + \operatorname{Cof}\varphi + B\operatorname{Cof}\varphi.\omega + C\operatorname{Cof}\varphi.\omega^2 + \text{etc.} = 1 + 2B\varphi + 3C\varphi^2 + 4D\varphi^3 + \ldots + 2nP\varphi^{2n-1} + (2n+1)Q\varphi^{2n} + (2n+2)R\varphi^{2n+1} + (2n+3)S\varphi^{2n+2} + \text{etc.} + a\omega + b\omega^2 + c\omega^3 + \text{etc.}$$

Diese Gleichung soll aber für jeden möglichen aliquoten Theil ω des Kreisbogens φ in (2) gelten: bey ihr ist also nach (5. §.):

$$\operatorname{Cosin}\varphi = 1 + 2B\varphi + 3C\varphi^2 + 4D\varphi^3 + \ldots + 2nP\varphi^{2n-1} + (2n+1)Q\varphi^{2n} + (2n+2)R\varphi^{2n+1} + (2n+3)S\varphi^{2n+2} + \text{etc.}$$

Das heißt: wenn man annimmt, daß die Reihe in (2) für jeden Kreisbogen φ gilt; so muß dafür auch diese Reihe gelten.

8. Nun müssen wir sehen, ob es gewisse Werthe von A, B, C, D, etc. wirklich giebt, für welche die Reihen (2) (7) bestehen mögen. In (7) wäre auch:

$$\operatorname{Cof}(\varphi+\omega) = 1 + 2B(\varphi+\omega) + 3C(\varphi+\omega)^2 + 4D(\varphi+\omega)^3 + \ldots + 2nP(\varphi+\omega)^{2n-1} + (2n+1)Q(\varphi+\omega)^{2n} + (2n+2)R(\varphi+\omega)^{2n+1} + (2n+3)S(\varphi+\omega)^{2n+2} + \text{etc.}$$

Hat aber diese Gleichung ihre Richtigkeit; so müssen gewisse von ω unabhängige Coefficienten f, g, h, etc. möglich seyn, für welche sie in folgende übergehen würde (10. §.).

$$\operatorname{Cof}(\varphi+\omega) = 1 + 2B\varphi + 3C\varphi^2 + 4D\varphi^3 + \ldots + (2n+3)S\varphi^{2n+2} + (2B + 2.3C\varphi + 3.4D\varphi^2 + \ldots + (2n-1)2nP\varphi^{2n-2} + 2n(2n+1)Q\varphi^{2n-1} + (2n+1)(2n+2)R\varphi^{2n} + (2n+2)(2n+3)S\varphi^{2n+1} + \text{etc.})\omega + f\omega^2 + g\omega^3 + h\omega^4 + \text{etc.}$$

9. We-

9. Wegen 1) 4) 3) müßte aber seyn:

$$\text{Cos}(\varphi+\omega)=\text{Cos}\varphi+u\text{Cos}\varphi.\omega^2+v\text{Cos}\varphi.\omega^3+x\text{Cos}\varphi.\omega^4+\text{etc.}$$
$$-\text{Sin}\varphi.\omega-B\text{Sin}\varphi.\omega^2-C\text{Sin}\varphi.\omega^3-\text{etc.}$$

10. Daher hätte man in 8) 9) gleiche Reihen: beyde durch ω dividirt, gäben also, wegen 7) folgende Gleichung:

$$2B+2.3C\varphi+3.4D\varphi^2+\ldots+(2n-1)2nP\varphi^{2n-2}$$
$$+2n(2n+1)Q\varphi^{2n-1}+(2n+1)(2n+2)R\varphi^{2n}$$
$$+(2n+2)(2n+3)S\varphi^{2n+1}+\text{etc.}+f\omega+g\omega^2+h\omega^3+\text{etc.}$$
$$=u\,\text{Cos}\varphi.\omega+v\,\text{Cos}\varphi.\omega^2+x\,\text{Cos}\varphi.\omega^3+\text{etc.}-\text{Sin}\varphi$$
$$-B\,\text{Sin}\varphi.\omega-C\,\text{Sin}\varphi.\omega^2-\text{etc.}$$

Und weil diese Gleichung für jeden möglichen aliquoten Theil ω des Kreisbogens φ gelten sollte: so wäre bey ihr, nach (5. §.), $2B+2.3C\varphi+3.4D\varphi^2+\text{etc.}=-\text{Sin}\varphi$, mithin

$$\text{Sin}\varphi=-2B-2.3C\varphi-3.4D\varphi^2\ldots-(2n-1)2nP\varphi^{2n-2}$$
$$-2n(2n+1)Q\varphi^{2n-1}-(2n+1)(2n+2)R\varphi^{2n}$$
$$-(2n+2)(2n+3)S\varphi^{2n+1}-\text{etc.}$$

11. Auf diese Art würde man zwo einander gleiche Reihen in 10) 2) haben, bey welchen demnach nach (7. §.) wäre:

$$P=-(2n+1)(2n+2)R,\text{ und }R=\frac{-P}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Hieraus erhellet überhaupt, daß der Coefficient R jeder geraden Potenz φ^{2n+2} in 2) gleich Null seyn müßte, wenn der Coefficient P der nächst niedrigeren geraden Potenz φ^{2n} in 2) gleich Null wäre: da also bey den Reihen 10) 2) $-2B=0$ (7. §.), folglich $B=0$ seyn würde, welches

der

der Coefficient der niedrigſten geraden Potenz φ^2 in 2) ſeyn ſollte; ſo müßten die Coefficienten aller geraden Potenzen $\varphi^2, \varphi^4, \varphi^6, \ldots \varphi^{2n}, \varphi^{2n+2}$ in 2) gleich Null ſeyn, und weil dieſe zu den Coefficienten der ungeraden Potenzen $\varphi, \varphi^3, \varphi^5$, etc. in 7) gehören; ſo müßten auch dieſe gleich Null ſeyn. In 2) 7) 10) müßte alſo ſtehen:

I. $\text{Sin}\varphi = \varphi + C\varphi^3 + E\varphi^5 + \ldots + Q\varphi^{2n+1} + S\varphi^{2n+3}$

II. $\text{Cof}\varphi = 1 + 3C\varphi^2 + 5E\varphi^4 + \ldots + (2n+1)Q\varphi^{2n} + (2n+3)S\varphi^{2n+2}$

III. $\text{Sin}\varphi = -2.3C\varphi - \ldots - 2n(2n+1)Q\varphi^{2n-1} - (2n+2)(2n+3)S\varphi^{2n+1} - \text{etc.}$

12. Bey dieſen gleichen Reihen I) III) hätte man nach (7. §.) $-2.3C = 1$, und überhaupt $-(2n+2)(2n+3)S = Q$: alſo

$$C = \frac{-1}{2.3},$$

und überhaupt

$$S = \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} \times Q.$$

Nach dieſen Werthen erhält man endlich aus I) II) die bekannten Reihen:

$$\text{Sin}\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1.2.3\ldots7} + \ldots$$
$$\pm \frac{\varphi^{2n+1}}{1.2.3\ldots2n(2n+1)} \mp \frac{\varphi^{2n+3}}{1.2.3\ldots(2n+2)(2n+3)} \ldots$$

$$\text{Cosin}\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{\varphi^6}{1.2.3\ldots6} + \ldots$$
$$\pm \frac{\varphi^{2n}}{1.2.3\ldots2n} \mp \frac{\varphi^{2n+2}}{1.2.3\ldots(2n+2)} \ldots$$

29. §.

Eben so ausgedehnt ist der Gebrauch des Satzes in (9. §.): man kann sich desselben bey vielen wichtigen Untersuchungen in der Geometrie, und Mechanik bedienen, vorzüglich alsdann, wenn man ihn mit der Lehre von der Summirung der Potenzenreihen natürlicher Zahlen verbindet; selbst bey der Lehre von Größten und Kleinsten würde jener Satz vom größten Nutzen seyn, wenn diese Lehre durch die Differential-Rechnung nicht ungemein abgekürzt würde.

Z. B. Sey die Function $Ax - Bx^2$ gegeben, und man verlange den Werth von x zu wissen, für welchen sie am größten wird.

Nehme ich an, daß x einen solchen Werth bereits erhalten hat; so wird, wenn ω einen wie immer kleinen aliquoten Theil von x bedeutet, nach (II. Band. 71. §. 1 Zus.)

sowohl

$$Ax - Bx^2 > A(x+\omega) - B(x+\omega)^2$$

als

$$Ax - Bx^2 > A(x-\omega) - B(x-\omega)^2$$

seyn müssen. Hieraus erhält man aber

I. $Ax - Bx^2 > Ax + A\omega - Bx^2 - 2B\omega x - B\omega^2$;

II. $Ax - Bx^2 > Ax - A\omega - Bx^2 + 2B\omega x - B\omega^2$.

Demnach ist

$2Bx\omega > A\omega - B\omega^2$ in I)

$2Bx\omega < A\omega + B\omega^2$ in II)

oder $2Bx > A - B\omega$

und $2Bx < A + B\omega$.

Nach

Nach (9. §.) ist also $2Bx=A$, und $x=\frac{A}{2B}$ der verlangte Werth von x.

Ferner sey der Werth von x zu bestimmen, für welchen die Function $\frac{A+Bx^2}{x}$ am kleinsten wird.

Wenn man voraussetzt, daß x denselben Werth bereits erlangt hat, und hierauf einen wie immer kleinen aliquoten Theil e von x nimmt; so wird seyn nach (II. Band. 71. §. 1. Zus.)

$$\frac{A+Bx^2}{x} < \frac{A+B(x+e)^2}{x+e};$$

$$\frac{A+Bx^2}{x} < \frac{A+B(x-e)^2}{x-e};$$

also

I. $(A+Bx^2)(x+e) < Ax+Bx(x+e)^2$;

II. $(A+Bx^2)(x-e) < Ax+Bx(x-e)^2$.

Demnach findet man

$Bx^2 > A-Bxe$ in I.);

$Bx^2 < A+Bxe$ in II.).

Mithin ist $Bx^2=A$ nach (9. §.), und nun $x=\sqrt{\frac{A}{B}}$ der Werth von x, für welchen die obige Function am kleinsten wird.

Man soll den Werth von x finden, für welchen die Function $\frac{ax-b}{cx^2+d}$ am größten wird.

Es wird seyn für einen wie immer kleinen aliquoten Theil e von x.

$$\frac{ax-b}{cx^2+d} > \frac{a(x+e)-b}{c(x+e)^2+d};$$

$$\frac{ax-b}{cx^2+d} > \frac{a(x-e)-b}{c(x-e)^2+d}.$$

Daher ist auch

I. $(ax-b)(c(x+e)^2+d) > (cx^2+d)(a(x+e)-b)$;

II. $(ax-b)(c(x-e)^2+d) > (cx^2+d)(a(x-e)-b)$.

Und hieraus findet man:

$acx^2e-2bcxe+axce^2-bce^2 > ade$ in I.);

$-acx^2e+2bcxe+axce^2-cbe^2 > -ade$ in II.).

Daher hat man

$acx^2-2bcx > ad-(ax-b)ce$;

$acx^2-2bcx < ad+(ax-b)ce$.

Folglich nach (9. §.

$acx^2-2bcx = ad$; und nun

$$x^2-\frac{2b}{a}x = \frac{d}{c},$$

$$x = \frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{c}+\frac{b^2}{a^2}\right)},$$

$$\text{oder } x = \frac{b}{a}\left(1 \pm \sqrt{\left(1+\frac{a^2d}{b^2c}\right)}\right).$$

30. §.

Die Methode, nach welcher wir die Reihen für Sin φ, Cosin φ in (28. §.) gefunden haben, könnte auch auf die Erfindung der Reihen für die übrigen Functionen von φ, wie Sin v φ, Cos v φ, Tang. φ, u. s. f. angewandt werden: man kann aber diese Reihen auch aus den bereits bekannten (28. §.) ableiten; auch alle umkehren, und den

Bogen

Bogen φ durch Sin φ, Cosin φ, Sin v φ, u. s. f. bestimmen. Die logarithmischen Reihen können ferner gebraucht werden, die Reihen für die sogenannten Exponentialgrößen zu bestimmen. Denn wenn man z. B. $y = u^v$ hätte; so wäre $ly = vlu$: also nach (16. §.)

$$y = 1 + \frac{vlu}{A} + \frac{v^2lu^2}{2A^2} + \frac{v^3lu^3}{2.3.A^3} + \frac{v^4lu^4}{2.3.4.A^4} + \text{etc.},$$

mithin

$$u^v = 1 + \frac{vlu}{A} + \frac{v^2lu^2}{2A^2} + \frac{v^3lu^3}{2.3.A^3} + \frac{v^4lu^4}{2.3.4.A^4} + \text{etc.}$$

Und wenn man u^v durch u und v, nicht aber durch v und lu, ausdrücken wollte; so brauchte man hier nur lu nach (12. §.) für $1+x=u$, daher $x=u-1$ zu bestimmen.

Hieraus erhellet nun, daß, weil doch die trigonometrischen, und logarithmischen Functionen, nebst Exponentialgrößen allein die bey analytischen Untersuchungen brauchbaren transcendenten Functionen abgeben, alle transcendente Functionen von einer veränderlichen Größe z sich durch gewisse gleichgültige algebraische Functionen ausdrücken lassen, entweder weil sie wirklich zu trigonometrischen, oder logarithmischen Functionen, oder den damit verwandten Exponentialgrößen gehören, oder weil sie sich auf solche auf irgend eine Art sollen zurückführen lassen.

31. §.

Auf diesen Gründen beruhet folgender Satz. Wenn A, B, C, D, . . . a, b, c, etc. ganz unbestimmte Größen bedeuten, die doch von der veränderlichen Größe z

nicht abhängen; so läßt sich jede Function y von einer veränderlichen Größe z durch $y = Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \text{etc.}$ ausdrücken, entweder weil sie wirklich diese Form hat, oder weil es möglich ist, sie in eine Function von dieser Form zu verwandeln.

Einige Schriftsteller nehmen diesen Satz bey ihren Untersuchungen als ein Postulatum an: dieses läßt sich bloß dadurch rechtfertigen, daß alle Functionen, wenn sie brauchbar seyn sollen, sich doch unter eine solche Form sollen bringen lassen, bey welcher das Gesetz, nach dem sie von der veränderlichen Größe und beständigen Größen abhängen, am bequemsten entdeckt werden kann. Wegen des wichtigen Gebrauchs, den ich davon in der Folge machen werde, glaube ich indessen verpflichtet zu seyn, die Gründe kurz zu berühren, aus welchen er sich darthun läßt.

1. Hätte man $U = (Az^a + Bz^b)^m$; so würde diese Potenz für jeden Exponenten m sich in eine Reihe von der Form $Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \text{etc.}$ verwandeln lassen (11. §. und I. Band. 76. §. 4. Zus. 3. n).

2. Ist $V = Az^a + Bz^b + Cz^c + \ldots + Pz^p$ ein Polynomium von r Gliedern; so ist $V + Qz^q$ ein von r+1 Gliedern: und nun ist für jeden Exponenten m $(V + Qz^q)^m = V^m + \alpha V^{m-1} . Qz^q + \beta V^{m-2} . Q^2 z^{2q} + \gamma V^{m-3} . Q^3 z^{3q} + \text{etc.}$ Für gewisse von z unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. (Daselbst). Wenn man also annimmt, jede Potenz V^m, V^{m-1}, V^{m-2}, V^{m-3}, u. s. f. sey einer Reihe von der Form $Az^a + Bz^b + Cz^c + \text{etc.}$ gleich; so muß auch die Potenz $(V + Qz^q)^m$ einer Reihe von derselben Form gleich seyn.

3. Auf

3 Auf dieſe Art läßt ſich aufs ſchärfſte darthun, daß die mte Potenz einer Function von der Form $Az^a + Bz^b + Cz^c + \text{etc.}$ für jeden Exponenten m einer Function von derſelben Form gleich iſt. Denn aus (1) erhellet, daß dieſes für eine 2theilichte Funktion wirklich gilt, und aus 2) folgt, daſſelbe müſſe für die (r+1)theilichte gelten, ſobald es für irgend eine rtheilichte gilt: alſo muß es für jede vieltheilichte Function gelten (I. Band. 54. §.).

Nun läßt ſich der obige Satz für alle algebraiſche Functionen, wie in (II. Band. 6. §.) beweiſen, den man hierauf auch für die transcendenten Functionen kann gelten laſſen (30. §.).

32. §.

Der Beweis des binomiſchen Lehrſatzes im 8ten Abſchnitte des erſten Bandes, verdient alle Aufmerkſamkeit eines Analyſten: was ihn vorzüglich intereſſant macht, ſind die Gründe, worauf er beruhet. Denn man kann denſelben Lehrſatz auch auf einem andern, wenn nicht einfacheren, gewiß gleich einfachen und ſicherſten Wege finden: dieſes habe ich oben (11. §.) gezeigt, und auf gleiche Art ließe ſich die Unterſuchung über die Potenz $(1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\text{etc.})^m$ anſtellen, welche im 85ſten §. des erſten Bandes vorkömmt. Aber die Gründe der Beweiſe für $(1+x)^m$, und $(1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\text{etc.})^m$, welche ich im erſten Bande aus den Papieren des ſel. Mitterpachers ausgeführt habe, ſind merkwürdiger, als ſie ihm, und mir, da ich den Entwurf zu jenen Beweiſen in ſeinen Papieren las, zu ſeyn ſchienen. Ich werde dieſen Entwurf

von Wort zu Wort herſetzen, wie er mir unter andern Fragmenten von ſeinem würdigſten Bruder, Hrn. Ludw. Mitterpacher, Prof. der Naturgeſchichte und Technologie bey der Ungariſchen Univerſität übergeben wurde. Da aus dieſem Entwurfe allein der 8te Abſchnitt im erſten Bande entſtanden iſt; ſo wird man ſich durch die Vergleichung deſſelben mit dieſem Abſchnitte einen Begriff von meiner eigenen Arbeit machen können, welche ich bey der Abfaſſung des im erſten Bande enthaltenen Unterrichtes hatte, indem auf gleiche Art der geſammte Unterricht aus ſolchen Entwürfen entſtanden iſt: und nun wird man im Stande ſeyn, das, was ich in Anſehung meiner Arbeit bey der Abfaſſung des erſten Bandes in den beyden Vorreden, zum erſten und zweyten Bande, kurz angeführt habe, beſſer auszulegen. Hier iſt der Mitterpacherſche Entwurf:

1. Si polynomii cujusvis $1+ax^m+bx^n+cx^p+\dots+kx^s+lx^t$ elevati ad quadratum termini ſinguli ducantur in exponentem variabilis x ejusdem termini, non excluſo etiam exponente o (quam exponentium ſeriem deineeps per E deſignabo), naſcitur factum = duplo polynomio ducto in idem polynomium, ſed cujus termini ſinguli ducti ſint in exponentem variabilis x ejusdem termini (quam exponentium ſeriem per e indicabo), ſeu $(1+ax^m+bx^n+cx^p+\dots+kx^s+lx^t)^2$. $E=2(1+ax^m+bx^n+cx^p+\dots+kx^s+lx^t)(1+ax^m+bx^n+cx^p+\dots+kx^s+lx^t)(o, m, n, p, \dots s, t)$, ſeu $=2(1+ax^m+bx^n+cx^p+\dots+kx^s+lx^t)(max^m+nbx^n+pcx^p+\dots+skx^s+tlx^t)$.

Dem.

Dem. Veritas aſſerti evidenter patet in binomio $(1+ax^m)^2$. Nam $(1+ax^m)^2.E=1.0+2max^m+2ma^2x^{2m}$ $=2(max^m+ma^2x^{2m})=2(1+ax^m).max^m=2(1+ax^m)$ $(1+ax^m)(0,m)$.

Non minus evidens eſt etiam in trinomio $1+ax^m+bx^n$. Nam $(1+ax^m+bx^n)^2.E=1.0+2max^m+2ma^2x^{2m}$ $+2nbx^n+2(m+n)abx^{m+n}+2nb^2x^{2n}=2(max^m+ma^2x^{2m}$ $+nbx^n+(m+n)abx^{m+n}+nb^2x^{2n})=2(1+ax^m+bx^n)(max^m$ $+nbx^n)=2(1+ax^m+bx^n)(1+ax^m+bx^n)(0,m,n)$.

Pone jam in aſſumpti polynomii r primis terminis, ſcilicet $1+ax^m+bx^n+cx^p+\ldots+kx^s=\varrho$ elevatis ad quadratum, ac in ſuos reſpectivos exponentes ductis dictam legem obtinere; obtinebit etiam, ſi eidem polynomio adjiciatur $(r+1)^{tus}$ terminus, ſeu lx^t, hoc eſt, erit etiam $(\varrho+lx^t)^2.E=2(\varrho+lx^t)(\varrho+lx^t)(e,t)$. Eſt enim $(\varrho+lx^t)^2.E=(\varrho^2+2\varrho lx^t+l^2x^{2t})E$. Jam vero $\varrho^2.E=2\varrho.\varrho.e$ (ex hypotheſi), et $2\varrho lx^t.E=2\varrho lx^t(e+t)$, quippe, ob duplam ſummam omnium praecedentium terminorum ϱ in terminum adjectum lx^t, patet, exponentem cujusvis termini eſſe ſummam ex t, et aliquo ex ϱ, ſeu (cum hujus exponentes ſucceſſivi deſignentur per e) ex $(e+t)$. Porro quivis terminus ducitur in exponentem variabilis ejusdem termini: ergo quivis ducitur in aliquem exponentem $(e+t)$, eſt igitur in hoc caſu $E=e+t$. Denique $l^2x^{2t}.E=l^2x^{2t}.2t=2lx^t.tlx^t$, igitur $(\varrho+lx^t)^2.E$ $=2\varrho.\varrho e+2\varrho lx^t(e+t)+2lx^t.tlx^t=2(\varrho+lx^t)(\varrho e+tlx^t)$ $=2(\varrho+lx^t)(\varrho+lx^t)(e,t)$. Ergo ſi dicta lex obtinet in ϱ ſeu r terminis, obtinet etiam in $\varrho+lx^t$ ſeu r+1 terminis:

atqui assumpta hypothesis vera est pro binomio et trinomio (ut demonstratum est), seu pro $r=2$, item $r=3$; ergo vera est etiam pro $r+1$, seu pro $r=4$, hoc est, si ad 3 terminos adjiciatur *4tus*: si pro $r=4$, tum et pro $r+1$, seu 5, et sic porro, quotcunque terminis constet polynomium.

2. $((1+X)Z).E=(1+X).eZ+Z(1+X)e$ (ubi per $1+X$ ejusmodi etiam polynomium, quale §. 1. assumpsi, intelligi potest, litera E designante seriem exponentium utriusque variabilis, e vero seriem exponentium polyn. $(1+X)$, aut Z, prout ea illi vel huic immediate jungitur).

Dem. Pone $y=(1+X)Z$, erit $y.E=((1+X)Z)E$. Jam vero $4y=((1+X)+Z)^2-((1+X)-Z)^2$: igitur $4y.E=((1+X)+Z)^2.E-((1+X)-Z)^2.E$. Est vero $((1+X)+Z)^2.E=2((1+X)+Z)((1+X)+Z)e=2((1+X)+Z)((1+X)e+eZ)$ ex (§. 1.). Et $-((1+X)-Z)^2.E=-2((1+X)-Z)((1+X)-Z)e=-2((1+X)-Z)((1+X)e-eZ)$ (ibid.). Unde

$$4yE=2(1+X)(1+X)e+2Z(1+X)e+2(1+X)eZ+2Z.eZ$$
$$-2(1+X)(1+X)e+2Z(1+X)e+2(1+X)eZ-2ZeZ,$$

seu $4yE=4Z(1+X)e+4(1+X)eZ$, ac denique

$$y.E=((1+X)Z)E=Z(1+X)e+(1+X)eZ. \text{ Q. E. D.}$$

3. Ostendendum jam est, esse generatim $(1+X)^m.E$ $m(1+X)^{m-1}(1+X)e$.

A) Sit m numerus integer positivus, et $y=(1+X)^{m+1}$, $Z=(1+X)^m$, ac demus, esse $Z.E=m(1+X)^{m-1}(1+X)e$, erit $Z(1+X)=(1+X)^{m+1}=y$, hinc $y.E=(Z(1+X))E$

$=Z(1+X)e+(1+X).ZE$ (§. 3.), seu pro Z, et ZE substituendo superiores valores, $y.E=(1+X)^m(1+X)e+m(1+X)^m(1+X)e$, seu $y.E=(m+1)(1+X)^m(1+X)e$. In hac porro expressione potentia unitate imminuta ducitur in exponentem potentiae, tum in radicem ductam in suos exponentes, quare eadem lex obtinet in potentia $(m+1)ma$, si obtinere ponamus in mta, obtinet vero in mta si $m=2$, ut ostensum (§. 1.), igitur etiam si $m=3$; si pro $m=3$ tum et pro 4, etc. adeoque si pro m quemvis numerum integrum positivum substituas.

B) Eadem lex ergo obtinebit pro quolibet exponente positivo fracto $m=\frac{u}{v}$: nam posito $y=(1+X)^{\frac{u}{v}}$, erit $y^v=(1+X)^u$, hinc $y^v.E=(1+X)^u.E$, unde per A) reperies $yE=\frac{u}{v}(1+X)^{\frac{u}{v}-1}(1+X)e$.

C) Hinc etiam pro quolibet exponente, integro et fracto, negativo $m=-n$. Cum enim sit $(1+X)^{-n}=\frac{1}{(1+X)^n}$, erit $(1+X)^{-n}(1+X)^{2n}=(1+X)^n$: quare etiam $((1+X)^{-n}(1+X)^{2n})E=(1+X)^nE$, unde per A) B) et (2. §.) reperietur $(1+X)^{-n}.E=-n(1+X))^{-n-1}(1+X)e$.

4. Sit jam quaerenda potentia $(1+x)^m$, seu y^m pro $y=1+x$. Fiat $y^m=1+Ax+Bx^2+Cx^3+\text{etc.}=Z$; erit $my^{m-1}.ye=ZE$, hinc $my^m.ye=y.ZE$, et ideo etiam $mZ.ye=y.ZE$. Ex hac aequatione, pro $y=1+x$, hinc $ye=1.o+x.1=x$, et $Z=1+Ax+Bx^2+Cx^3+\text{etc.}$, adeoque $ZE=1.o+Ax.1+Bx^2.2$

$+Cx^3+\text{etc.} = Ax + 2Bx^2+3Cx^3+\text{etc.}$ per (§. 1.), derivari poterunt valores pro A, B, C, etc.

Eadem autem methodo definietur lex pro $(1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\text{etc.})^m$, nimirum methodo ei simili, qua *Käſtnerus* in ſua analyſi infinitorum uſus eſt.

33. §.

Als ich nun die bey dieſem Entwurfe gegebenen Winke benutzte, um den 8ten Abſchnitt des erſten Bandes auszuarbeiten, bemerkte ich ſogleich, was jeder würde bemerkt haben, daß nämlich darin die Gründe einer eigenen Rechnungsart verſteckt liegen. Eben zu der Zeit hatte ich das Glück, in Peſt mit Herrn Major Vega Bekanntſchaft zu machen, dem ich auch nicht ermangelte meine Bemerkungen mitzutheilen. Indeſſen war ich, theils durch die mißlichſte Lage meiner Geſundheit, theils auch durch andere Geſchäfte gehindert, der Sache gehörig nachzudenken, und erſt einige Jahre darauf ſuchte ich, und fand, was ich finden zu können mit Grund vermuthete, nämlich eine neue Rechnungsmethode, welche ich die Exponential-Rechnung aus eben demſelben Grunde nenne, aus welchem ich mich einer ſolchen Benennung bey der Lehre von Gleichungen im erſten Bande (113. §. Anm.) bedient habe. Im Archiv für die reine und angewandte Mathematik vom Herrn Profeſſor Hindenburg werde ich ſie ausführlich abhandeln.

34. §.

Ich nehme mir doch hier die Freyheit, nur die erſten Gründe davon kurz zu berühren.

I. Ich ſetze den binomiſchen Lehrſatz als erwieſen voraus, etwa wie oben (11. §.): eben ſo nehme ich an, daß man ſich dadurch von der Richtigkeit des folgenden Satzes vollkommen überzeugt findet. (31. §.)

Jede mögliche Function y von einer veränderlichen Größe u kann durch $y = Au^a + Bu^b + Cu^c + \text{etc.}$ ausgedrückt werden, entweder, weil ſie wirklich dieſe Form hat, oder weil ſie einer Reihe von dieſer Form gleich iſt.

II. Durch eine abſolute veränderliche Größe wird diejenige verſtanden, welche keine Function von einer andern veränderlichen Größe, mithin in ſich veränderlich ſeyn ſoll. (II. Band. 2. §. 3. Zuſ.)

III. Das Exponential einer Function y von einer abſoluten veränderlichen Größe x ſoll diejenige Function bedeuten, welche man erhalten würde, wenn die einzelnen Glieder der gleichgültigen Reihe $y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.}$ (I) mit den ihnen zugehörigen Exponenten von x (den Exponent o nicht ausgenommen) multiplicirte. Die Methode, die Exponentialien aus Functionen, und dieſe aus jenen zu beſtimmen, kann die Exponential-Rechnung heißen. Die Bezeichnung endlich des Exponentials jeder Function y kann durch die Vorausſetzung des Buchſtaben e geſchehen.

Z. B. Für $y = 1 + ax + bx^2 + cx^{\frac{3}{2}} - dx^{-\frac{2}{3}}$

iſt das Exponential

$$ey = ax + 2bx^2 + \frac{3c}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2d}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot \cdot \cdot$$

Aus diesen Begriffen lassen sich nun folgende Hauptsätze leicht ableiten, bey deren Ausführung ich mich, um den Vortrag aufs möglichste abzukürzen, der Zeichensprache bedienen werde.

IV. Für jede absolute veränderliche Größe x, und Constante C ist $\varepsilon x = x.1 = x$; $\varepsilon C = C.0 = 0$ (III.).

V. Für alle Functionen P, Q, R, - - - Z von einer absoluten veränderlichen Größe x, ist wegen (III.). $\varepsilon(P+Q+R+\text{---}+Z) = \varepsilon P + \varepsilon Q + \varepsilon R + \text{---} + \varepsilon Z$.

VI. Für jede Function Z von x, und jede Constante C ist $\varepsilon(Z+C) = \varepsilon Z$ nach (III.).

VII. Für zwo Functionen P, Q, von einer veränderlichen Größe x ist $\varepsilon.PQ = P.\varepsilon Q + Q.\varepsilon P$.

Beweis. 1. Vielleicht sind P, Q einfache Functionen, durch zwo Potenzen von x bestimmt, etwa $P = Kx^k$, $Q = Lx^l$: in diesem Fall ist $PQ = KLx^{k+l}$. Also nach (III.) $\varepsilon.PQ = (k+l)KL + x^{k+l} = kLx^l.Kx^k + lKx^k.Lx^l = Q.\varepsilon P + P.\varepsilon Q$, nach (III.).

2. Oder eine Function P gehört unter die Form Mx^m, die andere Q aber, ist einer Reihe $p+q+r+\text{---}+z$ gleich, dergestalt, daß die einzelnen Glieder p, q, r - - - z eben so viele Functionen von der Form Mx^m sind (I.): ben dieser Voraussetzung nun muß seyn: $PQ = Pp + Pq + Pr + \text{---} + Pz$; mithin $\varepsilon.PQ = \varepsilon.Pp + \varepsilon.Pq + \varepsilon.Pr + \text{---} + \varepsilon.Pz$ (V.); folglich wegen des Erwiesenen in 1) auch $\varepsilon.PQ = P\varepsilon p + p\varepsilon P + P\varepsilon q + q\varepsilon P + P\varepsilon r + r\varepsilon P + \text{---} + P\varepsilon z + z\varepsilon P = P(\varepsilon p + \varepsilon q + \varepsilon r + \text{---} + \varepsilon z) + (p+q+r+\text{---}+z)\varepsilon P = P.\varepsilon Q + Q.\varepsilon P$ (V.).

3. Oder

3. Oder jede unter den Functionen P, Q, ist einer $p+q+r+\cdots+z$ gleich, wobey $p, q, r, \cdots z$ eben so viele Functionen von der Form Mx^m seyn sollen (I.): und in diesem Fall, wenn man $Q=p+q+r+\cdots+z$ setzt, wird man, wegen des für eine zusammengesetzte und eine einfache Function in 2) bereits erwiesenen Lehrsatzes, $\varepsilon.PQ=P.\varepsilon Q+Q.\varepsilon P$, wie in 2), finden.

VIII. Nach der bekannten Methode zu schließen, (I. Band. 54. §.) findet man aus (VII.), daß das Exponential des Products $PQR\cdots Z$ aus mehreren Functionen von x allemahl der Summe der Producte gleich ist, welche entstünden, wenn man das Exponential jedes einzelnen Factors mit allen übrigen Factoren multiplicirte.

IX. Für jede Function z von x, und jede Zahl m ist $\varepsilon.z^m=mz^{m-1}.\varepsilon z$.

Beweis. 1. Für eine ganze bejahte Zahl m erhellet dieses aus (VIII.).

2. Ist aber $m=\frac{u}{v}$ bey $y=z^m=z^{\frac{u}{v}}$ eine bejahte gebrochene Zahl: so ist $y^v=z^u$: also $vy^{v-1}.\varepsilon y=uz^{u-1}.\varepsilon z$ nach 1), mithin $\varepsilon y=\frac{u}{v}z^{\frac{u}{v}-1}.\varepsilon z$.

3. Ist endlich $m=-n$ eine ganze oder gebrochene verneinte Zahl bey $y=z^{-n}$; so hat man $yz^n=o$; also $nyz^{n-1}.\varepsilon z+z^n.\varepsilon y=o$ nach (VII.), und vor 1) 2), daher $\varepsilon y=-nz^{-n-1}.\varepsilon z$.

X. Für alle Functionen u, v, von x ist $\varepsilon\frac{u}{v}=\frac{v\varepsilon u-u\varepsilon v}{v^2}$.

Beweis.

Beweis. Denn es ist $yv=u$ für $y=\frac{u}{v}$: also $y\varepsilon v + v\varepsilon y = \varepsilon u$ (VII.); daher $\varepsilon y = \frac{v\varepsilon u - u\varepsilon v}{v^2}$.

XI. Nach den bisherigen Sätzen läßt sich das Exponential jeder algebraischen Function y von einer absoluten veränderlichen Größe vollkommen, und mit eben den Vortheilen bestimmen, welche die Differential-Rechnung darbiethet. Daraus und aus (16. 28. 30. §.) lassen sich sehr leicht die Regeln zur Exponentiirung logarithmischer und trigonometrischer Functionen, und der sogenannten Exponentialgrößen ableiten.

XII. Um den Gebrauch der Exponential-Rechnung zu erweitern, kann man nun den Weg umkehren, und aus den vorhergehenden Sätzen die Regeln zur Erfindung der Functionen aus gegebenen Exponentialien ableiten.

XIII. Man kann ferner höhere Exponentialien einführen. Das in (III.) erklärte Exponential εy mag das erste Exponential der Function y heißen. Und nun überhaupt jedes $(r+1)$te Exponential $\varepsilon^{r+1} y$ einer Function y, die sich auf die absolute veränderliche Größe x beziehen mag, soll das erste Exponential $\varepsilon \frac{\varepsilon^r y}{x}$ des Quotienten bedeuten, welcher entstehen würde, wenn man das nächst niedrigere rte Exponential von y durch x dividirte.

XIV. Dadurch setzt man sich in den Stand, die Exponentialien aller Ordnungen, welcher eine Function, sie mag algebraisch oder transcendentisch seyn, fähig ist, auf dem kürzesten Wege zu bestimmen.

XV.

XV. Wenn man $\varepsilon^2 y = \varepsilon \frac{\varepsilon y}{x}$, $\varepsilon^3 y = \varepsilon \frac{\varepsilon^2 y}{x}$, für $y = Mx^m$ nach (IX. XIII.) ſuchet, und das dabey bemerkte Geſetz für $\varepsilon^r y$ gelten läßt; ſo wird man finden nach (XIII. IX.), daß daſſelbe Geſetz auch für $\varepsilon^{r+1} y$ gelten muß: hieraus aber wird man nach (I. Band. 54. §.) ſchließen, für jede wie immer große Zahl n müſſe ſeyn:

$$\dot{E}^n Mx^m = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)Mx^{m-n+r}.$$

XVI. Wenn man bey $y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.}$ (I) $x+\omega$ ſtatt x nimmt, und die Potenzen nach dem binomiſchen Lehrſatze entwickelt; ſo wird man finden, daß der Werth Y, welchen y dafür erlanget, ſich, wegen (XV.), ſo ausdrücken läßt:

$$Y = y + \frac{\varepsilon y}{x}\omega + \frac{\varepsilon^2 y}{2x}\omega^2 + \frac{\varepsilon^3 y}{2.3x}\omega^3 + \cdots + \frac{\varepsilon^n y}{2.3\ldots nx}\omega^n.$$

Mithin, für $x - \omega$ ſtatt x bey y, wäre der neue Werth von y:

$$Y = y - \frac{\varepsilon y}{x}\omega + \frac{\varepsilon^2 y}{2x}\omega^2 - \frac{\varepsilon^3}{2.3x}\omega^3 + \cdots \pm \frac{\varepsilon^n y}{2.3\ldots nx}\omega^n.$$

XVII. Um die Anwendbarkeit dieſer Rechnung mehr auszudehnen, müßte man noch im Beſitz einer ſicheren Methode ſeyn, die Exponentialien unbekannter Functionen zu beſtimmen: ſie läßt ſich mit Zuziehung der erſten Begriffe von Differenzen nach (XVI.) wirklich angeben, wie ichs am angezeigten Orte (33. §.) darthun werde.

35. §.

Vergleichet man die Erklärung eines Exponentials (34. §. III.) mit den Erklärungen der Exponential-Gleichungen

chungen (I. Band. 113. §. 1. 9. Zuſ.); ſo wird man ſogleich finden, daß die erſte Exponential-Gleichung einer Hauptgleichung $Z=0$ nichts anders iſt, als das Exponential von Z gleich Null geſetzt, nämlich $\varepsilon Z=0$: und weil jede höhere Exponential-Gleichung aus der nächſt niedrigeren eben ſo entſtehen ſoll, wie die erſte Exponential-Gleichung $\varepsilon Z=0$ aus der Hauptgleichung $Z=0$ entſtehet; ſo iſt jede $(n+1)$te Exponential-Gleichung eigentlich nichts anders, als die erſte Exponential-Gleichung der nten Exponential-Gleichung, als einer Hauptgleichung, dergeſtalt daß, wenn $X=0$ die nte Exponential-Gleichung von $Z=0$ bedeutete, die erſte Exponential-Gleichung $\varepsilon X=0$ davon zugleich die $(n+1)$te von $Z=0$ ſeyn würde.

36. §.

Beym Beweiſe in (I. Band. 114. §.) kömmt alles darauf an, daß man darthue, die erſte Exponential-Gleichung $\varepsilon Z=0$ (33. §.) einer Hauptgleichung $Z=0$ müſſe durch $(x-\alpha)^{n-1}=0$ theilbar ſeyn, wenn $Z=0$ aus gleichen Wurzeln $\alpha, \alpha, \alpha \cdots \alpha$, n an der Zahl, beſtehet, welches nun am kürzeſten ſo geſchehen kann.

Es iſt gewiß, daß bey dieſer Vorausſetzung die Function Z dem Producte aus $(x-\alpha)^n$ in eine Function $X=x^r+ax^{r-1}+bx^{r-2}+\cdots+g$ von der Ordnung $r=m-n$ gleich ſeyn muß, wenn die Gleichung $Z=0$ von der Ordnung m iſt: man kann alſo ſetzen:

$$Z=(x-\alpha)^n X, \text{ und ſo iſt (34. §. VII. IX.).}$$

$$\varepsilon Z=nxX(x-\alpha)^{n-1}+(x-\alpha)^n \varepsilon X.$$

Die

Die erste Exponential-Gleichung ist daher nach (35. §.)

$$\varepsilon Z = (n\,X + (x-\alpha)\varepsilon X)(x-\alpha)^{n-1} = 0.$$

mithin gewiß durch $(x-\alpha)^{n-1}$ theilbar.

37. §.

Im ersten Bandes 121sten §. habe ich die Lehre von Exponential-Gleichungen auf die Entdeckung der Newtonschen Kennzeichen der unmöglichen Wurzeln angewandt, aber dieselben nur für einige erste Coefficienten bewiesen, wie dieses gewöhnlich geschieht, etwa beym Euler und Karsten, mit dem Unterschiede, daß diese sich dazu der Differential-Rechnung bedienen. Die Regeln, nach welchen man die unmöglichen Wurzeln einer Gleichung $y = 0$, der Newtonschen Angabe gemäß, zu beurtheilen pflegt, verdienen allerdings eine allgemeine Erörterung, welche ich demnach hier nachtragen will.

I. Sey eine Gleichung $y = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + \ldots + Qx^{m-r+1} + Rx^{m-r} + Sx^{m-r-1} + Tx^{m-r-2} + Ux^{m-r-3} + \ldots + \psi = 0$ von der mten Ordnung.

II. Wenn man nun bey irgend einem Coefficienten A, B, C, D, etc. etwa beym rten R findet, daß das Quadrat R^2 desselben kleiner ist, als das Product aus dem nächst folgenden $(r+1)$ten S in den nächst vorhergehenden $(r-1)$ten Q multiplicirt mit dem Bruche $\frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r}$, nämlich:

$$R^2 < \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} \cdot SQ;$$

so wird dieses ein untrügliches Zeichen seyn, daß die Gleichung $y=o$ wenigstens ein Paar unmöglicher Wurzeln hat.

III. Doch, wenn das Kennzeichen II) bey keinem Coefficienten A, B, C, D, etc. Statt findet, wird dieses noch nicht beweisen, daß die Gleichung I) keine unmöglichen Wurzeln hat.

IV. Aus zweyen unmittelbar auf einander folgenden Kennzeichen der unmöglichen Wurzeln, etwa welche bey dem r ten Coefficienten R, und dem $(r+1)$ten S der Gleichung I) nach II) vorkommen mögen, folgt nicht mehr, als aus einem Kennzeichen folgen würde: aus beyden kann man nämlich nur auf ein Paar unmöglicher Wurzeln von $y=o$ schließen.

V. Kommen hingegen mehrere Kennzeichen in einer unterbrochenen Ordnung vor, etwa beym r ten Coefficienten R, und beym $(r+2)$ten T, aber nicht auch beym $(r+1)$ten S; so kann man aus jedem Kennzeichen auf ein neues Paar unmöglicher Wurzeln der Gleichung $y=o$ in I) schließen.

Dieses sind die allgemeinen Sätze, aus welchen sich die in (I. Band. 121. §.) vorgeschriebenen Regeln ergeben, und die ich nun eben so allgemein zu beweisen suchen werde.

38. §.

1. Die gegebene Gleichung von der mten Ordnung sey, wie oben.

$$y=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+Dx^{m-4}+\ldots\ldots$$
$$+Qx^{m-r+1}+Rx^{m-r}+Sx^{m-r-1}+Tx^{m-r-2}+Ux^{m-r-3}$$
$$+\ldots\psi=o.$$

2. Man

2. Man setze $x = \frac{1}{z}$ in (1), sodann multiplicire man die ganze Gleichung $y = 0$ mit z^m; so wird sie in folgende übergehen.

$$X = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots + Qz^{r-1} + Rz^r + Sz^{r+1} + Tz^{r+2} + Uz^{r+3} + \ldots + \psi z^m = 0.$$

3. Weil jede Wurzel z der Gleichung $X = 0$ in (2) eine Wurzel $x = \frac{1}{z}$ der Gleichung $y = 0$ in (1) giebt; so muß für jedes Paar unmöglicher Wurzeln der Gleichung $X = 0$ auch die Gleichung $y = 0$ ein Paar unmöglicher Wurzeln haben: und wenn alle Wurzeln der Gleichung $y = 0$ in (1), oder $X = 0$ in (2) möglich sind; so müssen auch alle Wurzeln der Gleichung $X = 0$ im ersten Fall, oder $y = 0$ im zweyten Fall möglich seyn.

4. Die erste Exponential-Gleichung von (2) ist nach (35. 34. §. III.) $Az + zBz^2 + 3Cz^3 + \ldots + m\psi z^m = 0$, oder

$$A + 2Bz + 3Cz^2 + \ldots + m\psi z^{m-1} = 0.$$

Daher ist die zweyte Exponential-Gleichung von (2) nach (35. 34. §. III.) $2Bz + 3.2Cz^2 + \ldots + m(m-1)\psi z^{m-1} = 0$, demnach.

$$2B + 3.2Cz + \ldots + m(m-1)\psi z^{m-2} = 0.$$

Die dritte Exponential-Gleichung von 2) ist nun nach (35. 34. §. III.) $3.2.1.Cz + \ldots + m(m-1)(m-2)\psi z^{m-3} = 0$, daher

$$3.2.1.C + \ldots + m(m-1)(m-2)\psi z^{m-3} = 0.$$

5. Hätte man zu den Exponential-Gleichungen in (4) mehrere Glieder der Hauptgleichung $X = 0$ in (2) genom-

men; so würde das bey ihnen herrschende Gesetz einleuchtender gewesen seyn: gälte dieses Gesetz für die $(r-1)$te Exponential-Gleichung von $X=0$ in (2); so wäre

die $(r-1)$te Exponential-Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}(r-1)(r-2)(r-3)\cdots\cdots 5.4.3.2.1.Q\\ +r(r-1)(r-2)(r-3)\cdots\cdots 5.4.3.2.2.Rz\\ +(r+1)r(r-1)(r-2)\cdots\cdots 5.4.3.Sz^2\\ +(r+2)(r+1)r(r-1)(r-2)\cdots 5.4.Tz^3\\ +(r+3)(r+2)(r+1)r(r-1)\cdots 5.Uz^4\\ \quad\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}\\ +m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+2)\psi z^{m-r+1}\end{array}\right\}=0.$$

Und hieraus fände man die $r$te Exponential Gleichung nach (35. 34. § III.), wie folgt:

die $r$te Exponential-Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}r(r-1)(r-2)(r-3)\cdots\cdots 5.4.3.2.1.R\\ +(r+1)r(r-1)(r-2)\cdots\cdots 5.4.3.2.Sz\\ +(r+2)(r+1)r(r-1)(r-2)\cdots 5.4.3.Tz^2\\ +(r+3)(r+2)(r+1)r(r-1)\cdots 5.4.Uz^3\\ \quad\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}\\ +m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+1)\psi z^{m-r}\end{array}\right\}=0.$$

Daraus erhellet nun, daß das bey den drey ersten Exponential-Gleichungen in (4) herrschende Gesetz, sobald man es für irgend eine $(r-1)$te Exponential-Gleichung gelten läßt, auch für die nächst höhere $r$te Exponential-Gleichung gelten muß. Dasselbe gilt also für alle Exponential-Gleichungen der Hauptgleichung $X=0$ in (2) nach (I. Band. 54. §.). Demnach erhält man für $X=0$ in (2) nach (35. 34. §. III.) aus der nächst vorhergehenden $r$ten.

die

die (r+1)te Exponential-Gleichung.

$$\left.\begin{array}{l}(r+1)r(r-1)(r-2)(r-3)\cdots 5.4.3.2.1.S\\ +(r+2)(r+1)r(r-1)(r-2)\cdots 5.4.3.2.Tz\\ +(r+3)(r+2)(r+1)r(r-1)\cdots 5.4.3.Uz^2\\ \qquad\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}\\ +m(m-1)(m-2)\cdots(m-r)\psi z^{m-r-1}\end{array}\right\}=0.$$

6. Wenn man jede Exponential-Gleichung in (5) durch ihr erstes Glied dividirt; so erhält man aus (5) folgende drey Gleichungen.

$$1+\frac{rR}{Q}z+\frac{(r+1)rS}{2Q}z^2+\frac{(r+2)(r+1)rT}{3.2Q}z^3+$$
$$+\frac{(r+3)(r+2)(r+1)rU}{4.3.2Q}z^4+\cdots\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+2)\psi}{(r-1)(r-2)\cdots 4.3.2.1.Q}z^{m-r+1}=0.$$

$$1+\frac{(r+1)S}{R}z+\frac{(r+2)(r+1)T}{2R}z^2$$
$$+\frac{(r+3)(r+2)(r+1)U}{3.2R}z^3+\cdots\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+1)\psi}{r(r-1)(r-2)\cdots 4.3.2.1.R}z^{m-r}=0.$$

$$1+\frac{(r+2)T}{S}z+\frac{(r+3)(r+2)U}{2S}z^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r)\psi}{(r+1)r(r-1)\cdots 4.3.2.1.S}z^{m-r-1}=0.$$

7. Ferner bezeichne man die Coefficienten der Gleichungen in (6) mit einzelnen Buchstaben auf diese Art.

$$\alpha = \frac{rR}{Q};\ \beta = \frac{(r+1)rS}{2Q};\ \gamma = \frac{(r+2)(r+1)rT}{3.2Q};$$

$$\delta = \frac{(r+3)(r+2)(r+1)rU}{4.3.2.Q};\ - - - - -$$

$$\mu = \frac{m(m-1)(m-2)\ - - -\ (m-r+2)\psi}{(r-1)(r-2)\ - - - - - 4.3.2.1.Q}.$$

$$a = \frac{(r+1)S}{R};\ b = \frac{(r+2)(r+1)T}{2R};$$

$$c = \frac{(r+3)(r+2)(r+1)U}{3.2.R};\ - - - - - -$$

$$u = \frac{m(m-1)(m-2)\ - - -\ (m-r+1)\psi}{r(r-1)(r-2)\ - - - - 4.3.2.R}.$$

$$\mathfrak{A} = \frac{(r+2)T}{S};\ \mathfrak{B} = \frac{(r+3)(r+2)U}{2S};$$

$$- - - - \mathfrak{S} = \frac{m(m-1)\ - - -\ (m-r)\psi}{(r+1)r(r-1) - - 4.3.2.S}.$$

Ueberdem sey $m - r + 1 = n$, mithin $m - r = n - 1$, und $m - r - 1 = n - 2$.

Für diese Bezeichnungen wird man aus (6) folgende Exponential-Gleichungen für die Hauptgleichung $X = 0$ in (2) erhalten.

Die $(r-1)$te.

$$1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + - - - + \mu z^n = 0.$$

Die rte.

$$1 + az + bz^2 + cz^3 + - - - - + uz^{n-1} = 0.$$

Die $(r+1)$te

$$1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + - - - + \mathfrak{S}z^{n-2} = 0.$$

8. Hätte

8. Hätte man die Hauptgleichung $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots + Lx^r + Mx^{r-1} + \cdots + Rx^2 + Sx + T = 0$; so wäre ihre $(m-2)$te Exponential-Gleichung

$$x^2 + \frac{2A}{m}x + \frac{2B}{m(m-1)} = 0.$$

9. Denn aus der Hauptgleichung (8) erhält man die Gleichung $1 + \frac{S}{T}x + \frac{R}{T}x^2 + \cdots + \frac{L}{T}x^r + \frac{K}{T}x^{r+1} + \frac{I}{T}x^{r+2} + \cdots + \frac{B}{T}x^{m-2} + \frac{A}{T}x^{m-1} + \frac{1}{T}x^m = 0$: also ist überhaupt ihre

rte Exponential-Gleichung nach (5)

$$\left.\begin{array}{l} r(r-1)(r-2)\cdots 5.4.3.2.1.\frac{L}{T} \\ +(r+1)r(r-1)(r-2)\cdots 5.4.3.2.\frac{K}{T}x \\ +(r+2)(r+1)r(r-1)\cdots 5.4.3.\frac{I}{T}x^2 \\ \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\ +m(m-1)\cdots(m-r+1).\frac{1}{T}x^{m-r} \end{array}\right\} = 0.$$

Wenn man demnach bey diesem Ausdrucke $r = m-2$ setzt; so wird er die $(m-2)$te Exponential-Gleichung geben: aber für $r = m-2$ müssen die Coefficienten $\frac{L}{T}, \frac{K}{T}, \frac{I}{T}$, in $\frac{B}{T}, \frac{A}{T}, \frac{1}{T}$ übergehen; daher ist die $(m-2)$te Exponential-Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}(m-2)(m-3)\cdots\cdots 5.4.3.2.1.\frac{B}{T}\\ +(m-1)(m-2)\cdots\cdots 5.4.3.2.\frac{A}{T}x\\ +m(m-1)\cdots\cdots 5.4.3.\frac{1}{T}x^2\end{array}\right\}=0.$$

mithin $x^2+\frac{2A}{m}x+\frac{2B}{m(m-1)}=0$, wie in (8).

10. Setzt man nun $z=\frac{1}{x}$ in (7); so gehen die dortigen Exponential-Gleichungen in folgende über.

$x^n+\alpha x^{n-1}+\beta x^{n-2}+\gamma x^{n-3}+\delta x^{n-4}+\cdots+\mu=0.$

$x^{n-1}+ax^{n-2}+bx^{n-3}+cx^{n-4}+\cdots\cdots+u=0,$

$x^{n-2}+\mathfrak{A}x^{n-3}+\mathfrak{B}x^{n-4}+\cdots+\mathfrak{S}=0.$

11. Für $m=n$ in (8) erhält man aus der ersten Hauptgleichung in (10) ihre $(n-2)$te Exponential-Gleichung.

$$x^2+\frac{2\alpha}{n}x+\frac{2\beta}{n(n-1)}=0.$$

12. Für $m=n-1$ findet man ferner aus der zweyten Hauptgleichung in (10) ihre $(n-3)$te Exponential-Gleichung nach (8).

$$x^2+\frac{2a}{n-1}x+\frac{2b}{(n-1)(n-2)}=0.$$

13. Und für $m=n-2$ in (8) erhält man aus der dritten Hauptgleichung in (10) ihre $(n-4)$te Exponential-Gleichung.

$$x^2+\frac{2\mathfrak{A}}{n-2}x+\frac{2\mathfrak{B}}{(n-2)(n-3)}=0.$$

14. Ich

14. Ich will nun annehmen, daß alle Wurzeln der Hauptgleichung $y = 0$ in (1) möglich sind: so müssen auch alle Wurzeln der Gleichung $X = 0$ in (2) möglich seyn, nach (3); und nun sind auch alle Wurzeln der Exponential-Gleichungen in (7) möglich (I. Band. 113. §. 10. Zusatz); und weil für jede Wurzeln in (7) eine $x = \frac{1}{z}$ in (10) bestimmt wird; so werden auch alle Wurzeln der Gleichungen in (10), daher auch alle Wurzeln ihrer Exponential-Gleichungen in 11) 12) 13) möglich seyn: in (11) muß also seyn:

$$\frac{\alpha^2}{n^2} > \frac{2\beta}{n(n-1)}, \text{ oder } \frac{\alpha^2}{n^2} = \frac{2\beta}{n(n-1)};$$

mithin

$$\alpha^2 > \frac{2n\beta}{n-1}, \text{ oder } \alpha^2 = \frac{2n\beta}{n-1};$$

also nach (7)

$$R^2 > \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} \cdot SQ,$$

$$\text{oder } R^2 = \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} \cdot SQ.$$

Nimmt man hingegen an, es sey

$$R^2 < \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} \cdot SQ;$$

so ist auch

$$\frac{r^2R^2}{(m-r+1)^2Q^2} < \frac{2(r+1)rS}{2(m-r)(m-r+1)Q},$$

daher nach (7)

$$\frac{\alpha^2}{n^2} < \frac{2\beta}{n(n-1)}.$$

Bey dieser Voraussetzung muß die quadratische Gleichung in (11) unmögliche Wurzeln haben: also hat auch die erste Gleichung in (10) ein Paar unmöglicher Wurzeln (I. Band. 113. §. 8. 10. Zus.) Weil ferner für jede Wurzel x der ersten Gleichung in (10) eine Wurzel $z = \frac{1}{x}$ der ersten Gleichung in (7) bestimmt wird; so hat auch die erste Gleichung in (7) ein Paar unmöglicher Wurzeln. Und hieraus folgt ferner, daß auch die Hauptgleichung $X = 0$ in (2) ein Paar unmöglicher Wurzeln haben muß (I. B. 113. §. 8. 10. Zusatz), mithin auch die Hauptgleichung $y = 0$ in (2) nach (3).

Dies war demnach der allgemeine Beweis des Satzes II) in (37. §.)

15. Ferner nehme man an, daß bey keinem (rten) Coefficienten R der Gleichung $y = 0$ in (1) das Kennzeichen unmöglicher Wurzeln (37. §. II) Statt findet, daß vielmehr

$$\text{entweder } R^2 > \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} \cdot SQ$$

$$\text{oder } R^2 = \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} \cdot SQ$$

ist; so folgt hieraus nichts mehr, als daß auch

$$\frac{\alpha^2}{n^2} > \frac{2\beta}{n(n-1)}, \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha^2}{n^2} = \frac{2\beta}{n(n-1)}$$

wie in (14) seyn muß, daß demnach beyde Wurzeln der quadratischen Gleichung in (11) möglich sind: da aber die Exponential-Gleichung in (11) der ersten Hauptgleichung in (10) mögliche Wurzeln haben kann, wenn gleich diese Hauptgleichung

gleichung unmögliche Wurzeln hat, (I. Band. 113. §. 7. 10. Zusatz) und demnach alle, oder einige Wurzeln der ersten Gleichung in (7), folglich auch der Gleichungen in (2) 1) unmöglich sind (I. Band 113. §. 8. 10. Zus.); so ist offenbar, daß man nicht behaupten kann, es seyen alle Wurzeln der Gleichung $y=o$ möglich, sobald das in (37. §. II.) erklärte Kennzeichen bey keinem Coefficienten Statt findet, welches zum Beweise des Satzes III) in (37. §.) dient.

16. Nun nehmen wir an, daß die Kennzeichen unmöglicher Wurzeln der Gleichung $y=o$ nach (37. §. II.) bey zweenen unbestimmten unmittelbar auf einander folgenden Coefficienten, dem rten R, und $(r+1)$ten S, wirklich Statt finden, dergestalt, daß

$$\text{sowohl } R^2 < \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} \cdot SQ$$

$$\text{als } S^2 < \frac{(m-r)(r+2)}{(m-r-1)(r+1)} \cdot RT$$

sey. Aus diesen beyden Kennzeichen soll nun nach (37. §. IV.) nicht auf mehr als ein Paar unmöglicher Wurzeln der Gleichung $y=o$ in (1) zu schließen gestattet seyn. Denn aus ihnen folgt nur, daß wegen (7)

$$\text{sowohl I. } \frac{\alpha^2}{n^2} < \frac{2\beta}{n(n-1)},$$

$$\text{als II. } \frac{a^2}{(n-1)^2} < \frac{2b}{(n-1)(n-2)} \text{ ist.}$$

Nun giebt I) zwo unmögliche Wurzeln für die quadratische Gleichung in (11), woraus folgt, daß auch die erste Gleichuug in (10) zwo unmögliche Wurzeln hat. (I. Band. 113. §. 8. 10. Zusatz.)

Ferner

Ferner giebt II) zwo unmögliche Wurzeln für die quadratische Gleichung in (12), und hieraus folgt, daß auch die zweyte Gleichung in (10) zwo unmögliche Wurzeln hat. (I. Band. 113. §. 8. 10. Zusatz.)

Da also für jede Wurzel x der ersten oder zweyten Gleichung in (10) eine Wurzel $z = \frac{1}{x}$ der ersten oder zweyten Gleichung in (7) entstehet; so folgt aus I) daß die erste Gleichung in (7), und aus II) erhellet, daß die zweyte Gleichung in (7) zwo unmögliche Wurzeln hat. Weil aber die zweyte Gleichung in (7) die erste Exponential-Gleichung der ersten Gleichung in (7) ist (35. §.); so folgt auch aus II), daß die erste Gleichung in 7) ein Paar unmöglicher Wurzeln hat. (I. Band. 113. §. 8. Zusatz.)

Gewiß ist es also, daß die erste Gleichung in (7) sowohl wegen I), als wegen II) ein Paar unmöglicher Wurzeln haben muß: hieraus folgt aber noch nicht, daß dasjenige Paar unmöglicher Wurzeln der ersten Gleichung in (7), wovon das Kennzeichen in I) seyn soll, von jenem Paar, wovon II) das Kennzeichen ist, wirklich unterschieden ist; es ist vielmehr ganz gewiß, daß jenes mit diesem einerley ist. Denn sonst könnte die erste Gleichung in (7) vier unmögliche Wurzeln haben, und zwar für jede ganze bejahte Zahl $n > 2$, mithin auch für $n = 3$, welches nicht seyn kann. (I. Band. 96. §.) Aus den beyden Bedingungen I) II) darf man also nur auf ein Paar unmöglicher Wurzeln der ersten Gleichung in (7) schließen, mithin auch nur auf ein Paar solcher Wurzeln der Gleichung $X = 0$ in (2) nach (I. Band. 113. §. 8. 10. Zusatz.), folglich auch nur auf ein

Paar

Paar unmöglicher Wurzeln der Hauptgleichung $y=o$ in (1) nach (3).

17. Endlich nehme man an, daß die Kennzeichen der unmöglichen Wurzeln der Gleichung $y=o$ in (1) nach (37. §. II.) bey zwenen unbestimmten und in einer unterbrochenen Ordnung auf einander folgenden Coefficienten, etwa dem rten R, und $(r+2)$ten T, Statt finden, so daß

$$\text{sowohl } R^2 < \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} \cdot SQ,$$

$$\text{als } T^2 < \frac{(m-r-1)(r+3)}{(m-r-2)(r+2)} \cdot SU \text{ ist.}$$

Diese beyden Kennzeichen sollen nun zum Beweise dienen, daß die Gleichung $y=o$ gewiß zwey Paare unmöglicher Wurzeln hat, welches zum Beweise des Satzes V) in (37. §.) dienen mag.

Denn daraus folgt nothwendig, daß, wegen (7) auch

$$\text{I. } \frac{\alpha^2}{n^2} < \frac{2\beta}{n(n-1)}$$

$$\text{und II. } \frac{\mathfrak{A}}{(n-2)^2} < \frac{2\mathfrak{B}}{(n-2)(n-3)}$$

seyn muß, daß demnach die beyden Wurzeln sowohl der quadratischen Gleichung in (11) als der in (13) unmöglich sind, es mag n was immer für eine ganze bejahte Zahl > 3 seyn. Da also hieraus weiter folgt, daß sowohl die erste, als die dritte Gleichung in (10) wenigstens ein Paar unmöglicher Wurzeln hat (I. Band 113. §. 8. 10. Zusatz.), folglich, weil jede Wurzel x in (10) eine z in (7) geben soll,

ſoll, auch ſowohl die erſte, als die dritte Gleichung in (7) ein Paar unmöglicher Wurzeln haben muß: ſo kann man aus den beyden Bedingungen I) II) mit Gewißheit ſchließen, daß die erſte Gleichung in (7) wegen der Bedingung I), und die dritte Gleichung in (7) wegen der Bedingung II) ein Paar unmöglicher Wurzeln hat. Nun aber iſt die dritte Gleichung in (7) im Grunde die zweyte Exponential-Gleichung der erſten Gleichung in (7) nach (35. §.), folglich muß die erſte Gleichung in (7) ſchon deswegen ein Paar unmöglicher Wurzeln haben, weil es die dritte Gleichung in (7) hat (I. Band. 113. §. 8. 10. Zuſatz.): aus den beyden oben für R, T, aufgeſtellten Kennzeichen folgt alſo, daß die erſte Gleichung in (7) vielleicht zwey von einander unterſchiedene Paare unmöglicher Wurzeln hat; daß ſie aber ſolche wirklich haben muß, erhellet ſo: Zuerſt muß n in (7) wenigſtens $=4$, mithin die erſte Gleichung in (7) wenigſtens von der 4ten Ordnung ſeyn, und eine Gleichung von der 4ten Ordnung kann wohl 4 unmögliche Wurzeln haben. Weil ferner die Coefficienten einer Gleichung gewiß von ihren Wurzeln nach beſtimmten Geſetzen abhängen, und α, $\mathfrak{A}$, wegen (7) durch verſchiedene Coefficienten der Hauptgleichung $y=0$ beſtimmt ſind, ſo müſſen auch die unmöglichen Wurzeln der erſten Gleichung in (7), welche ſie wegen I) haben ſoll, von jenen, die ſie wegen II) hat, unterſchieden ſeyn. Hat aber die erſte Gleichung in (7) zwey Paare unmöglicher Wurzeln; ſo muß ſolche auch die Gleichung $X=0$ in (2) nach (I. Band. 113. §. 8. 10. Zuſatz), mithin auch die Gleichung $y=0$ in (1) nach (3) haben.

39. §.

39. §.

Zum Beschluß dieses Abschnittes will ich nun einige Stellen im ersten Bande berichtigen.

Das Beyspiel in (I. Band. 94. §.) ist fehlerhaft, und muß folgendermaßen verbessert werden.

$Z = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$

Für $x = \sqrt{-1}$ $Z = 1 - \sqrt{-1} + 5 + \sqrt{-1} - 6 = 0$

Für $x = -\sqrt{-1}$ $Z = 1 + \sqrt{-1} + 5 - \sqrt{1} - 6 = 0$

Für $x = 2$ $Z = 16 + 8 - 20 + 2 - 6 = 0$

Für $x = -3$ $Z = 81 - 27 - 45 - 3 - 6 = 0$

Daher auch bey demselben §. auf der 247sten Seite muß stehen: $Z = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$.

Auf der 255sten Seite soll $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$ statt $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ stehen.

Auf der 260sten Seite auf der 12ten Zeile lese man gerade oder ungerade, statt ungerade oder gerade.

Auf der 265sten Seite, 14. 15. 16. Zeile lese man, das entgegengesetzte Zeichen, daher (—) und der (r+1)te Coefficient T das eigene, daher (+) vor sich, anstatt: sein eigenes Zeichen, daher (+), und der (r+1)te Coefficient T das entgegengesetzte, daher (—) vor sich.

Auf der 267sten Seite, 2. 4. Zeile lese man, verneint seyn, und bejaht seyn, statt bejaht seyn, und verneint seyn.

Auf derselben Seite 8. Zeile lese man, allemahl bejaht, statt allemahl verneint.

Daselbst 10. Zeile statt: und es ist dasselbe ꝛc. bis zu Ende, lese man: und es ist dasselbe Glied allemahl verneint

verneint, wenn die Anzahl der verneinten Wurzeln ungerad ist.

Auf der 269sten Seite ist das erste Beyspiel fehlerhaft, welches daher muß so verbessert werden.

$$\begin{array}{rrrrrr} x^4 = & y^4 & -20y^3 & +150y^2 & -500y & +625 \\ 2x^2 = & & 2y^3 & -30y^2 & +150y & -250 \\ -13x^2 = & & & -13y^2 & +130y & -325 \\ -14x = & & & & -14y & +70 \\ +24 = & & & & & +24 \\ \hline & y^4 & -18y^3 & +107y^2 & -234y & +144 = 0 \end{array}$$

Mit Recht wird in 123. §. 2. Zus. bemerkt, daß das daselbst erklärte Verfahren keinesweges vortheilhaft seyn kann, wofern die gegebene Gleichung nicht von einem hohen Grad ist: ich setze noch hinzu, daß es überhaupt nicht viel nutzet, und statt dessen man sich der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe mit größerem Vortheil bedienen wird. Indessen merke man sich, daß bey jenem Verfahren überall die nach der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe vorzunehmende Division verstanden werden muß, welches bey demselben Zusatze nicht stehet. Dabey ist die Auflösung des zweyten Beyspiels fehlerhaft, und man muß sie so verbessern.

Dividirt man $L^2 = 0$ durch $L^3 = 0$; so erhält man den Quotienten $4x - 5 = 0$, und den Rest $-\frac{3}{4}$: daher, dividire man $L = 0$ durch $L^2 = 0$. Da nun diese Division einen Rest $= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ giebt; so versuche man $L^2 = 0$ durch denselben Rest zu dividiren; diese Division geschieht ohne Rest; daher bestehet $L^2 = 0$ aus dem Factor $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$, oder $x - 1 = 0$, $L = 0$ aber aus dem

Factor

Factor $(x-1)^2=0$, und $Z=0$ aus dem Factor $(x-1)^3=0$, welcher also drey gleiche Wurzeln, jede $x=1$, für die Gleichung $Z=0$ giebt.

Im 126. §. beym ersten Beyspiele, auf der 374sten Seite, ist $8+\frac{88}{8}+\frac{128}{8^3}-\frac{192}{8^2}>16$, nicht aber <16; mithin werden alle Glieder der dortigen Gleichung $X=0$ für $\alpha=8$ bejaht seyn: folglich liegen alle bejahte Wurzeln von $Z=0$ zwischen 0 und 8.

Der Schluß beym Beyspiele in 126. §. 2. Zus. ist fehlerhaft: denn die neue Gleichung $X=0$ ist so beschaffen, daß für $\alpha=2$ das zweyte Glied verneint bleibt, und alle übrigen Glieder bejaht werden müssen: also muß die Gleichung $X=0$ zwo bejahte Wurzeln, und eine verneinte $y=x-\alpha$ haben (I. Band. 120. §. 2. Zus.), woraus doch erhellet, daß $\alpha=2$ größer ist, als eine bejahte Wurzel von $Z=0$.

Daher muß man daselbst auf der 383sten Seite, beym dortigen Beyspiele den Schluß, daß alle bejahte Wurzeln der Gleichung $x^3-15x^2+63x-50=0$ zwischen 1 und 2 liegen, in diesen verwandeln, daß eine bejahte Wurzel der Gleichung $x^3-15x^2+63x-50=p$ zwischen 1 und 2 liegt.

Der II. Abschnitt.

Von den ersten Gründen der Differential-Rechnung, insofern sie sich als ein Theil der Analysis endlicher Größen betrachten läßt; nebst Erweiterung der im zweyten Bande enthaltenen Integral-Rechnung.

40. §.

Erklärung.

Der Umstand, daß jede Function eine veränderliche Größe ist, veranlasset die Eintheilung der veränderlichen Größen in absolute oder unabhängige, und respective oder abhängige. Jede Function ist eine respective oder abhängige veränderliche Größe, insofern ihre Veränderungen abhängig von den möglichen Veränderungen der bey ihr vorhandenen veränderlichen Größen betrachtet werden; hingegen soll sich jede Function auf eine oder mehrere absolute oder unabhängige veränderliche Größen beziehen, welche nämlich unabhängig von andern veränderlichen Größen, als in sich veränderlich betrachtet werden.

Z. B. Wenn y die Ordinate, x die Abscisse, vom Endpunkte des Durchmessers gerechnet, und r den Halbmesser einer Kreislinie bedeutet; so kann man die Abscisse x als eine absolute veränderliche Größe betrachten, der man nach Belieben was immer für Werthe beylegen kann: die Ordinate y wird nun eine Function davon seyn, nämlich $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$, welche als eine von x abhängige veränderliche Größe angesehen wird. Man kann aber die Untersuchung umke-

umkehren, und zu wissen verlangen, wie sich die Abscisse x ändern muß, wenn man sich bey der Ordinate y gewisse Aenderungen denkt: dabey würde man y als eine absolute oder unabhängige, und $x=r\pm\sqrt{(r^2-y^2)}$ als eine Function, oder eine von ihr abhängige veränderliche Größe betrachten.

41. §.

Erklärung. Wenn man sich vorstellt, die absolute veränderliche Größe x, auf welche eine Function y sich beziehen mag, nehme um irgend eine Größe zu; so muß sich die Function y selbst ändern, nämlich zu- oder abnehmen: diejenige Größe, um welche x zunimmt, heißt die Differenz der absoluten veränderlichen Größe x: und diejenige Größe, um welche sich die Function y ändern mag, sobald x um eine Differenz wächst, wird die Differenz der Function y genannt: beyde können überhaupt mit Δx, Δy bezeichnet werden.

42. §.

1. Zusatz. Will man die Differenz Δy einer Function y haben, welche einer gewissen Differenz Δx der absoluten veränderlichen Größe x, worauf y sich bezieht (40. §.), zugehören mag; so stelle man sich vor, x gehe in $x+\Delta x$ über; suche hierauf den Werth y', welchen y dafür erlangen mag, und ziehe davon die Function y selbst ab: daher setze man $\Delta y=y'-y$, vergesse aber nicht, $y'-y$ mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen, wenn die Function y von der Beschaffenheit ist, daß sie bey zunehmender veränderlicher Größe x abnimmt. (41. §. und II. Band. 3. §. 1, 2. Zus.)

43. §.

2. Zusatz. Eine beständige Größe C ist keiner Differenz fähig (41. §.): in dieser Bedeutung wird $\Delta C = o$ gesetzt.

44. §.

3. Zusatz. Wenn C eine beständige Größe, und Z was immer für eine Function von einer absoluten veränderlichen Größe x ist; so muß seyn $\Delta y = \Delta Z$ für $y = Z + C$, und $\Delta y = C\Delta Z$ für $y = Cz$ (41. 42. §.), nach (II. Band. 5. §. 5. 7. Zus.).

45. §.

4. Zusatz. Und für die Summe $y = P + Q + R + \cdots + Z$ mehrerer Functionen von einer absoluten veränderlichen Größe x ist $\Delta y = \Delta P + \Delta Q + \Delta R + \cdots + \Delta Z$ (41. 42. §.) nach (II. Band. 3. §. 6. Zus.)

46. §.

5. Zusatz. Die Differenzen zweer gleichen Functionen X, Z von einer absoluten veränderlichen Größe x müssen einander gleich seyn, nämlich $\Delta X = \Delta Z$, für $X = Z$ (41. 42. §.), nach (II. Band. 3. §. 5. Zus.)

47. §.

6. Zusatz. Die Differenz Δx einer absoluten veränderlichen Größe x hat keinen bestimmten Werth (41. §.): man kann sie also wie jede andere veränderliche Größe behandeln: man kann sich einbilden, daß Δx bey einer Function von Δx, allmählich abnimmt, dergestalt, daß Δx nach und nach die Werthe $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{4}x$, $\frac{1}{5}x$, $\cdots$ $\frac{1}{100}x$, $\frac{1}{101}x$, $\frac{1}{102}x$, u. s. f. erlanget, wenn es daran gelegen ist, zu

wissen,

wissen, welche Werthe dafür die Function von Δx erhalten würde: man kann auch $\Delta x = 0$ setzen, wenn man zu wissen verlangt, was für einen Werth die gegebene Function von Δx erhalten würde, wenn Δx verschwände.

48. §.

Erklärung. Eine sich allmählich ändernde (zu- oder abnehmende) Größe Z nähert sich einem bestimmten Werthe U, wenn der Unterschied zwischen ihr und diesem Werthe allmählich kleiner wird, und wenn er kleiner werden kann, als jede wie immer kleine denkbare gleichartige Größe; so heißt U die Gränze der sich ändernden Größe Z.

49. §.

Zusatz. Hätte man $\omega = P + Q\Delta x + R\Delta x^2 + S\Delta x^3 + \text{etc.}$ eine Function von der Differenz Δx der absoluten veränderlichen Größe x, wobey P, Q, R, S, etc. gewisse von Δx unabhängige Größen bedeuten mögen, so könnte man sich vorstellen, Δx nähme nach (47. §.) beständig ab: dabey würde der Unterschied $Q\Delta x + R\Delta x^2 + S\Delta x^3 + \text{etc.}$ zwischen ω und P allmählich kleiner werden; ja er kann kleiner werden, als jede wie immer kleine denkbare gleichartige Größe μ (3. §.): wenn also Δx beständig abnimmt; so nähert sich ω dem bestimmten Werthe P, der zugleich die Gränze aller Werthe ist, welche ω wegen der unaufhörlichen Abnahme von Δx nach und nach erhalten kann (48. §.)

50. §.

Erklärung. Wenn ein veränderliches Verhältniß $Z : 1$ sich allmählich ändert, zu- oder abnimmt; so nähert

ſich daſſelbe einem beſtimmten Verhältniſſe U : 1, wenn der Unterſchied zwiſchen ihm und dieſem Verhältniſſe allmählich kleiner wird: es iſt auch U : 1 die Gränze des ſich ändernden Verhältniſſes Z : 1, wenn es möglich iſt, daß der Unterſchied dieſer Verhältniſſe kleiner werde, als ein wie immer kleines denkbare Verhältniß u : 1.

51. §.

Zuſatz. Es erhellet aus bekannten Gründen, daß der Unterſchied zwiſchen den Verhältniſſen Z : 1 und P : 1 deſto kleiner ſeyn muß, je kleiner iſt der Unterſchied zwiſchen ihren vorderen Gliedern Z, P, ſo wie alſo, für $Z = P + Q\Delta x + R\Delta x^2 + S\Delta x^3 + \text{etc.}$, der Unterſchied zwiſchen Z und P, wenn Δx nach (47. §.) beſtändig abnimmt, kleiner werden kann, als jede wie immer kleine denkbare gleichartige Größe p, welches macht, daß P die Gränze der ſich, wegen der unaufhörlichen Abnahme von Δx, allmählich ändernden Größe Z iſt (49. §.); eben ſo kann der Unterſchied zwiſchen den Verhältniſſen Z : 1 und P : 1 kleiner werden, als jedes wie immer kleine denkbare Verhältniß p : 1, welches macht, daß P : 1 die Gränze des ſich, wegen der unaufhörlichen Abnahme von Δx, allmählich ändernden Verhältniſſes Z : 1 iſt (50. §.)

52. §.

Erklärung. Jeder beſtimmte Werth, welchen das Verhältniß $\Delta y : \Delta x$ der Differenz einer Function y gegen die Differenz Δx der abſoluten veränderlichen Größe x, worauf ſie ſich beziehe, oder die Gränze haben mag, welcher daſſelbe Verhältniß, wenn Δx allmählich abnähme, etwa nach (47. §.),

ſich

sich nähern würde, kann man das Differential-Verhältniß der Function y nennen, und den Exponenten davon mit dy bezeichnen. Die Erfindung der Differential-Verhältnisse ist der Gegenstand der Differential-Rechnung; und die Erfindung der Functionen, deren Differential-Verhältnisse bekannt sind, ist der Gegenstand der Integral-Rechnung.

53. §.

1. Zusatz. In der Bedeutung, in welcher die Differenz einer beständigen Größe C gleich Null gesetzt wird (43. §), muß auch der Exponent ihres Differential-Verhältnisses gleich Null seyn (52. §.)

54. §.

2. Zusatz. Für $y = ax$ wäre $\Delta y = a\Delta x$ (44. §.): also hätte das Verhältniß $\Delta y : \Delta x = a : 1$ einen durch a bestimmten Werth. Dies ist daher das Differential-Verhältniß von $y = ax$, und der Exponent davon $dy = a$ (52. §.).

55. §.

2. Zusatz. Daher, für $a = 1$, wäre $y = x$ und $\Delta y : \Delta x = 1 : 1$ das Differentialverhältniß der absoluten veränderlichen Größe x, sein Exponent aber $dy = dx = 1$ (54. §.), eine abstracte Einheit, in der Bedeutung, in welcher der Exponent eines Verhältnisses überhaupt eine abstracte Zahl ist.

56. §.

3. Zusatz. Ist eine Function y von der absoluten veränderlichen Größe x so beschaffen, daß für gewisse von Δx

unabhängige Größen K, L, M, N, etc. ihre Differenz $\Delta y = K\Delta x + L\Delta x^2 + M\Delta x^3 + N\Delta x^4 + \text{etc.}$ ist; so muß $\Delta y : \Delta x = (K + L\Delta x + M\Delta x^2 + N\Delta x^3 + \text{etc.}) : 1$, mithin K = n das Differentialverhältniß von y (51. 52. §.), und der Exponent davon $dy = K$ (52. §.) seyn, statt dessen man auch $dy = Kdx$ setzen kann (55. §.).

57. §.

Lehrsatz. Für jede Function y von einer veränderlichen Größe v müssen gewisse von Δv unabhängige Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. möglich seyn, wofür ist $\Delta y = \alpha\Delta v + \beta\Delta v^2 + \gamma\Delta v^3 + \delta\Delta v^4 + \text{etc.}$

Beweis. 1. Man kann jede durch die veränderliche Größe v gegebene Function durch $y = Av^a + Bv^b + Cv^c + Dv^d + \text{etc.}$ ausdrücken (31. §.)

2. Wenn man sich demnach vorstellt, daß die absolute veränderliche Größe, auf welche die Function y sich bezieht, (40. §.), es mag v dieselbe, oder was immer für eine Function von einer absoluten veränderlichen Größe x seyn, um eine Differenz zunimmt, so muß in beyden Fällen $v + \Delta v$ aus v werden, und dafür findet man in (1) nach (42. §.)

$$\Delta y = A(v+\Delta v)^a + B(v+\Delta v)^b + C(v+\Delta v)^c + \text{etc.}$$
$$- Av^a \quad - Bv^b \quad - Cv^c \quad - \text{etc.}$$

3. Drückt man nun die Potenzen von $v + \Delta v$ nach dem, für alle mögliche Exponenten bereits erwiesenen (11. §.), binomischen Lehrsatze aus (I. Band. 76. §. 4. Zusatz.); so wird man finden, daß es gewisse bloß von A, B, C, ... a, b, c, ... v abhängige Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. geben

geben muß, für welche die Differenz Δy in (2.) folgendermaßen ausgedrückt werden kann.

$$\Delta y = \alpha\Delta v + \beta\Delta v^2 + \gamma\Delta v^3 + \delta\Delta v^4 + \text{etc.},$$
$$\text{für } \alpha = aAv^{a-1} + bBv^{b-1} + cCv^{c-1} + \text{etc.}$$

58. §.

1. Zusatz. Weil jede Function u von einer absoluten veränderlichen Größe x durch $u = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.}$ kann ausgedrückt werden (31. §.), wofür $\Delta u = \alpha\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \delta\Delta x^4$ erhalten wird (57. §.); so ist gewiß, daß es für jede Function u von einer absoluten veränderlichen Größe x ein Differentialverhältniß geben muß, dessen Exponent $du = \alpha = \alpha\, dx$ (56. §.) sich aus der Function u nach einem bestimmten Gesetze herleiten läßt, so daß $du = (aAx^{a-1} + bBx^{b-1} + cCx^{c-1} + \text{etc.})\, dx$ seyn würde, wenn $u = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.}$ wäre. (57. §.)

59. §.

2. Zusatz. Die Differenz Δu jeder Function u von einer absoluten veränderlichen Größe x hängt von der Differenz Δx dieser Größe so ab, daß man sie für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten β, γ, δ, etc. durch $\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \delta\Delta x^4 + \text{etc.}$ ausdrücken kann. (58. §.)

60. §.

3. Zusatz. Ist v in (57. §.) keine absolute veränderliche Größe, sondern eine Function von einer solchen Größe x; so kann man $\Delta v = \frac{dv}{dx}\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \text{etc.}$ setzen (59. §.); dafür erhielte man $\Delta y = \alpha\frac{dv}{dx}\Delta x + P\Delta x^2$

$+Q\Delta x^3+R\Delta x^4+$ etc. für gewiſſe von Δx unabhängige Coefficienten P, Q, R, etc. aus (57. §.) wegen (31. §.); daher $dy=\frac{\alpha dv}{dx}=\alpha dv$. (56. §.)

61. §.

4. Zuſatz. Es mag demnach v eine abſolute oder abhängige veränderliche Größe ſeyn (40. §.); ſo muß doch für jede Function y von v ein Differentialverhältniß möglich ſeyn, deſſen Exponent dy dem Produkte aus dem Exponenten dv des Differentialverhältniſſes der veränderlichen Größe v in eine Größe V gleich iſt, welche von der Function y ſelbſt nach einem beſtimmten Geſetze abhängt, ſo daß $dy=Vdv$, und $V=a\Delta v^{a-1}+bBv^{b-1}+cCv^{c-1}+$ etc. (60. 57. §.) ſeyn muß, wenn $y=Av^a+Bv^b+Cv^c+$ etc. iſt (31. §.), wobey man doch $dv=1$ ſetzen kann, ſobald v eine abſolute veränderliche Größe iſt. (58. 55. §.)

62. §.

5. Zuſatz. Weil, für $y=Z+C$, $\Delta y=\Delta Z$ (44. §.) $=\frac{dZ}{dx}\Delta x+\beta\Delta x^2+\gamma\Delta x^3+$ etc. (59. §.), mithin $dy=dZ$ (56. §.) iſt; ſo erhellet daraus, daß der Exponent des Differentialverhältniſſes einer aus einem beſtändigen Theile C beſtehenden Function $y=Z+C$ dem Exponenten des Differentialverhältniſſes ihres veränderlichen Theils Z gleich iſt, mithin ganz unabhängig von dem unveränderlichen Theile C.

63. §.

6. Zuſatz. Und für $y=CZ$ wäre $\Delta y=C\Delta Z$ (44. §.) $=\frac{CdZ}{dx}\Delta x+C\beta\Delta x^2+C\gamma\Delta x^3+$ etc. (59. §.); mithin

hin $dy = C.dZ$ (56. §.); der Exponent des Differentialverhältnisses des Produkts aus einer beständigen Größe C in was immer für eine Function Z von einer absoluten veränderlichen Größe x ist gleich dem Produkte aus derselben beständigen Größe C in den Exponenten des Differentialverhältnisses der Function Z.

64. §.

7. Zusatz. Für die Summe $y = P+Q+R+\cdots+Z$ mehrerer Functionen von einer absoluten veränderlichen Größe x ist der Exponent ihres Differentialverhältnisses der Summe der Exponenten der den einzelnen Functionen P, Q, R, ... Z zugehörigen Differentialverhältnisse gleich: nämlich $\Delta y = \Delta P+\Delta Q+\Delta R+\cdots+\Delta Z$ (45. §.)
$= \left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dx}+\frac{dR}{dx}+\cdots+\frac{dZ}{dx}\right)\Delta x + M\Delta x^2 + N\Delta x^3 + \text{etc.}$ für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten M, N, etc. (59. §.); also $dy = dP+dQ+dR+\cdots+dZ$ (56. §.).

65. §.

Lehrsatz. Die Exponenten der Differentialverhältnisse zweyer Functionen $u = X+A$, $z = Z+B$ von einer absoluten veränderlichen Größe x, deren veränderliche Theile X, Z einander gleich sind, sind unter sich gleich.

Beweis. Weil $\Delta X = \Delta Z$ für jede mögliche Differenz $\Delta x = \frac{1}{m}x$ seyn muß (46. 47. §.); so müssen gewisse, von Δx unabhängige Coefficienten F, G, H, ... f, g, h, etc. möglich seyn, für welche $\frac{dX}{dx}\Delta x + F\Delta x^2 + G\Delta x^3 + H\Delta x^4$

$+H\Delta x^4+\text{etc.} = \frac{dZ}{dx}\Delta x + f\Delta x^2 + g\Delta x^3 + h\Delta x^4 + \text{etc.}$

seyn würde (59. §.): also ist auch $\frac{dX}{dx}+F\Delta x+G\Delta x^2+\text{etc.} = \frac{dZ}{dx}+f\Delta x+g\Delta x^2+\text{etc.}$, und $\frac{dX}{dx} = \frac{dZ}{dx}$ (5. §.), mithin $dX = dZ$, und nun $du = dz$ (62. §.).

66. §.

Lehrsatz. Wenn der veränderliche Theil Y einer Function $y = Y+A$ grösser ist, als der veränderliche Theil Z einer andern Function $z = Z+B$; so muß auch der Exponent des Differentialverhältnisses der ersten Function größer seyn, als der Exponent des Differentialverhältnisses der zweyten Function, nämlich $dy > dz$.

Beweis. Ich setze voraus, daß der veränderliche Theil einer Function hier im strengsten Verstande genommen, daher von dem unveränderlichen Theile, wenn die Function einen solchen hat, genau abgesondert betrachtet wird. Wäre z. B. die Function $y = (a+x)^2+b$ gegeben, weil $(a+x)^2 = a^2+2ax+x^2$ ist; so müßte man sich durch den veränderlichen Theil von y eigentlich $2ax+x^2$ denken, und a^2+b, nicht aber b allein, für den unveränderlichen Theil halten.

Wenn demnach der veränderliche Theil Y der Function $y = Y+A$ größer ist, als der veränderliche Theil Z einer andern Function $z = Z+B$; so muß es eine Function $X = Y-Z$ von der absoluten veränderlichen Größe x worauf die Functionen y, x sich beziehen mögen (40. §.), gegeben,

ben, wofür $y=X+Z$, daher $dY=dX+dZ$ (65. 64. §.), mithin $dY > dZ$ ist. Weil aber $dy=dY$ und $dz=dZ$ seyn muß (62. §.); so ist auch $dy > dz$.

67. §.

1. Zusatz. Daher auch umgekehrt gleiche Exponenten dy, dz der Differentialverhältnisse können nur solchen Functionen y, z zugehören, deren veränderliche Theile einander gleich sind (66. §.)

68. §.

2. Zusatz. Ungleiche Exponenten $dz > dy$ zweyer Differentialverhältnisse können aber nur solchen Functionen $y=Y+A$, und $z=Z+B$ zugehören, deren veränderliche Theile Y, Z ungleich sind (65. §.), dergestalt, daß der veränderliche Theil Z derjenigen Function z, welcher der größere Exponent dz zugehört, größer seyn muß, als der veränderliche Theil Y der andern Function y, welcher der kleinere Exponent zugehört. (66. §.)

69. §.

Lehrsatz. Wenn eine Function y von einer absoluten veränderlichen Größe x dergestalt beschaffen ist, daß für gewisse von Δx unabhängige Größen $Z, P, Q, R, \ldots p, q, r$, etc. und für jede mögliche Differenz Δx (47. §.)

sowohl $\frac{\Delta y}{\Delta x} > Z+\beta\Delta x+p\Delta x^2+r\Delta x^3+$ etc.,

als $\frac{\Delta y}{\Delta x} < Z+P\Delta x+Q\Delta x^2+R\Delta x^3+$ etc.

ist; so ist $dy=Z=Zdx$ (55. §.) der Exponent des Differentialverhältnisses der Function y.

Beweis. Man kann $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ durch $\frac{dy}{dx}+\beta\Delta x+\gamma\Delta x^2+\delta\Delta x^3+$ etc. ausdrücken (59. §.): also ist

$$\frac{dy}{dx} > Z+(p-\beta)\Delta x+(q-\gamma)\Delta x^2+(r-\delta)\Delta x^3+\text{etc.}$$

und $$\frac{dy}{dx} < Z+(P-\beta)\Delta x+(Q-\gamma)\Delta x^2+(R-\delta)\Delta x^3+\text{etc.}$$

mithin $\frac{dy}{dx}=Z$ (9. §.), und $dy=Zdx$.

70. §.

Aus den bisherigen allgemeinsten Gründen läßt sich die Möglichkeit des Nutzens, welchen man aus einer umständlichen Betrachtung der Differentialverhältnisse ziehen kann, und der Grund davon begreiflich machen.

1. Weil nämlich die Exponenten der Differentialverhältnisse aller Functionen, ihrer Größe und Form nach, auf eine vollkommen bestimmte Art durch die Functionen selbst bestimmt sind (58. §.) und die Grundursache aller Eigenschaften, welche einer Function zukommen mögen, ihre Form ist (II. Band, 2. §. 1. Zusatz.); so ist wohl möglich, daß gewisse Eigenschaften der Functionen sich aus den Eigenschaften der Exponenten ihrer Differentialverhältnisse herleiten, und

2. selbst die Functionen aus den Exponenten ihrer Differentialverhältnisse sich bestimmen lassen, welches zugleich die Möglichkeit der Integralrechnung (52. §.) beweiset.

3. Dieses (1) (2) ist endlich um so wichtiger, da es möglich ist, den Exponenten des Differentialverhältnisses einer

einer Function y zu entdecken, wenn gleich dieſe noch unbekannt iſt, nämlich nach (69. §.) wie es ein einziges Beyſpiel, etwa das in (II. Band. 29. §.) genugſam erläutern würde.

71. §.

Aufgabe. Den Exponenten des Differentialverhältniſſes jeder Potenz $y = Ax^a$ von einer abſoluten veränderlichen Größe x zu beſtimmen (II. Band 7. §.)

Auflöſung. Er iſt $dy = aAx^{a-1}$, oder auch $dy = aAx^{a-1}dx$ (58. 55. §.)

§. 72.

Aufgabe. Für den bekannten Exponenten dv des Differentialverhältniſſes einer Function v von einer abſoluten veränderlichen Größe x, den Exponenten des Differentialverhältniſſes jeder Potenz $y = Av^a$ von v zu finden. (II. Band. 8. §.)

Auflöſung. Er muß ſeyn $dy = aAv^{a-1}dv$ (61. §.).

73. §.

Aufgabe. Für die bekannten Exponenten du, dv, der Differentialverhältniſſe zwoer Functionen u, v von einer abſoluten veränderlichen Größe x, den Exponenten des Differentialverhältniſſes des Products $y = uv$ zu finden (II. Band. 9. §.)

Auflöſung. Er iſt $dy = udv + vdu$.

Beweis. Es iſt $\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta v\Delta u$ (II. Band. 9. §.).

In

In der Bedeutung (59. §.) ist aber

$$\Delta v = \frac{dv}{dx}\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \beta'\Delta x^2 + \gamma'\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Wenn man daher diese Werthe in Δy nähme; so würde Δy, für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten K, L, M, etc. in folgende Reihe übergehn.

$$\Delta y = \left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)\Delta x + K\Delta x^2 + L\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Daher ist nach (56. §.) $dy = u\,dv + v\,du$.

74. §.

Aufgabe. Für die bekannten Exponenten der Differentialverhältnisse zwoer Functionen Y, Z von einer absoluten veränderlichen Größe x, den Exponenten des Differentialverhältnisses der gebrochenen Function $y = \frac{Y}{Z}$ zu finden.

Auflösung. Es muß seyn $dy = \frac{Z\,dY - Y\,dZ}{Z^2}$, wegen (73. §.), wie in (II. Band. 9. §. 3. Zusatz.).

75. §.

Lehrsatz. Wenn $dy = \alpha\,dz$ der Exponent des Differentialverhältnisses einer Function y von der veränderlichen Größe z ist; so muß $dz = \frac{dy}{\alpha}$ der Exponent des Differentialverhältnisses derjenigen Function z von y seyn, welche durch Umkehrung der ersten Function entstehen würde. (II. Band. 10. §. 1. 2. Zusatz.)

Beweis. Wie in (II. Band. 11. §. Zusatz.)

76. §.

76. §.

Aufgabe. Den Exponenten des Differentialverhältnisses der logarithmischen Function $y=lz$, von einer veränderlichen Größe z zu finden (II. Band. 17. §.).

Auflösung. Die Auflösung im 2ten Bande ist wirklich unrichtig: wenn doch M den Modul des Systemes bedeutet (18. §.), so soll seyn $dy=\frac{Mdz}{z}$, wie im (2ten Bandes 17. §. 1. Zus.)

Beweis. Denn wenn die absolute veränderliche Größe, auf welche $y=lz$ sich bezieht, es mag z dieselbe Größe, oder was immer für eine Function von einer absoluten veränderlichen Größe x seyn, um eine Differenz wächst; so muß z in $z'=z+\Delta z$ übergehen, und dafür übergeht $y=lz$ in $l(z+\Delta z)=y'$: also ist (4. §.)

$$y'-y=\Delta y=l(z+\Delta z)-lz,$$

Daher nach (I. Band. 135. §.).

$$\Delta y=l\frac{z+\Delta z}{z}=l\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right).$$

Nach (12. §. findet man also:

$$\Delta y=\left(\frac{\Delta z}{z}-\frac{\Delta z^2}{2.z^2}+\frac{\Delta z^3}{3.z^3}-\frac{\Delta z^4}{4.z^4}+\frac{\Delta z^5}{5.z^5}-\frac{\Delta z^6}{6.z^6}+\text{etc.}\right)M.$$

Ist nun z eine absolute veränderliche Größe; so folgt daraus $dy=\frac{M}{z}=\frac{Mdz}{z}$ (56. §.).

Ist aber z keine absolute veränderliche Größe, sondern eine Function von der absoluten veränderlichen Größe x:

$+Q\Delta x^5+R\Delta x^6+$ etc. für gewiſſe von Δx unabhängige Coefficienten P, Q, R, etc. aus (57. §.) wegen (31. §.); daher $dy=\frac{\alpha dv}{dx}=\alpha dv$. (56. §.)

61. §.

4. Zuſatz. Es mag demnach v eine abſolute oder abhängige veränderliche Größe ſeyn (40. §.); ſo muß doch für jede Function y von v ein Differentialverhältniß möglich ſeyn, deſſen Exponent dy dem Produkte aus dem Exponenten dv des Differentialverhältniſſes der veränderlichen Größe v in eine Größe V gleich iſt, welche von der Function y ſelbſt nach einem beſtimmten Geſetze abhängt, ſo daß $dy=Vdv$, und $V=aAv^{a-1}+bBv^{b-1}+cCv^{c-1}+$ etc. (60. 57. §.) ſeyn muß, wenn $y=Av^a+Bv^b+Cv^c+$ etc. iſt (31. §.), wobey man doch $dv=1$ ſetzen kann, ſobald v eine abſolute veränderliche Größe iſt. (58. 55. §.)

62. §.

5. Zuſatz. Weil, für $y=Z+C$, $\Delta y=\Delta Z$ (44. §.) $=\frac{dZ}{dx}\Delta x+\beta\Delta x^2+\gamma\Delta x^3+$ etc. (59. §.), mithin $dy=dZ$ (56. §.) iſt; ſo erhellet daraus, daß der Exponent des Differentialverhältniſſes einer aus einem beſtändigen Theile C beſtehenden Function $y=Z+C$ dem Exponenten des Differentialverhältniſſes ihres veränderlichen Theils Z gleich iſt, mithin ganz unabhängig von dem unveränderlichen Theile C.

63. §.

6. Zuſatz. Und für $y=CZ$ wäre $\Delta y=C\Delta Z$ (44. §.) $=\frac{CdZ}{dx}\Delta x+C\beta\Delta x^2+C\gamma\Delta x^3+$ etc. (59. §.); mithin

IV. $d\,\mathrm{Cof}\varphi = -d\varphi\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2..5} - \text{etc.}\right)$.

Alſo iſt $d\,\mathrm{Sin}\varphi = \mathrm{Cof}\varphi . d\varphi$,

und $d\,\mathrm{Cof}\varphi = -\mathrm{Sin}\varphi . d\varphi$.

78. §.

Will man demnach den Bogen φ als eine Function von ſeinem Sinus oder Coſinus betrachten; ſo iſt (77. §.) nach (75. §.)

$$d\varphi = \frac{d\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cofin}\varphi}, \quad d\varphi = -\frac{d\,\mathrm{Cofin}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}.$$

Setzt man $\varphi = \mathrm{Arc\,Sin}\,x$, mithin $\mathrm{Cof}\varphi = \sqrt{(1-x^2)}$, indem $\mathrm{Sin}\,\varphi = x$ iſt; ſo hat man

$$d\,\mathrm{Arc\,Sin}\,x = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Setzt man aber $\varphi = \mathrm{Arc\,Cof}\,x$, mithin $\mathrm{Sin}\,\varphi = \sqrt{(1-x^2)}$, wegen $\mathrm{Cof}\,\varphi = x$; ſo iſt:

$$d\,\mathrm{Arc\,Cof}\,x = \frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Dieſe Formuln ſind in (II. Band. 22. §. 1. 2. 3. Zuſ.) aus andern Gründen hergeleitet worden, und daraus ergiebt ſich alles übrige (a. a. O. 4. 5. bis 17. Zuſ.), wie daſelbſt.

79. §.

Erklärung. Das im (52. §.) erklärte Differentialverhältniß ſoll das erſte Differentialverhältniß einer Function y heißen: iſt ſein Exponent dy eine Function von der veränderlichen Größe, auf welche y ſich bezieht; ſo wird es auch dafür ein erſtes Differentialverhältniß geben, und

dieſes ſoll das zweyte Differentialverhältniß von y ſeyn. Ueberhaupt ſoll jedes höhere Differentialverhältniß in Anſehung des Exponenten des nächſt niedrigeren Differentialverhältniſſes einer Function y das ſeyn, was das erſte Differentialverhältniß in Anſehung der Function y ſelbſt iſt: nämlich jedes (r+1)te Differentialverhältniß einer Function y ſoll das erſte Differentialverhältniß des Exponenten ihres rten Differentialverhältniſſes bedeuten, inſofern dieſer Exponent als eine Function von eben der veränderlichen Größe iſt, auf welche y ſich beziehen mag. Wenn demnach dy, d^2y, d^3y, d^4y, - - - d^ry, $d^{r+r}y$ die Exponenten des 1ſten, 2ten, 3ten, 4ten, - - - rten, (r+1)ten Differentialverhältniſſes von y bedeuten; ſo iſt eigentlich $d^2y = d.dy$; $d^3y = d.d^2y$; $d^4y = d.d^3y$, und $d^{r+r}y = d.d^ry$.

80. §.

Da alſo die Regeln zur Erfindung des erſten Differentialverhältniſſes für jede mögliche Function y im Vorhergehenden feſtgeſetzt worden ſind; ſo kann man nach denſelben Regeln nun auch höhere Differentialverhältniſſe für alle Functionen y aus ihren erſten Differentialverhältniſſen beſtimmen (79. §.), wie in (II. Band. 15. §. und Zuſ. 17. §. 2. Zuſ. 22. §. 18. Zuſ.)

81. §.

Will man aber das Syſtem der höheren Differenzen Δ^2y, Δ^3y, Δ^4y, etc. annehmen (II. B. 12. 13. 14. §.), und darauf das Syſtem der höheren Differentialverhältniſſe bauen (welches gar nicht nothwendig iſt); ſo wird man dieſes Syſtem am bequemſten ſo aufführen. So wie die Gränze,

welcher

welcher das Verhältniß $\Delta y : \Delta x$ der ersten Differenz einer Function y von der absoluten veränderlichen Größe x gegen die Differenz dieser Größe sich nähern würde, wenn Δx nach (47. §.) allmählich abnähme, das erste Differentialverhältniß von y hieß (52. §.); eben so soll jedes nte Differentialverhältniß von y die Gränze bedeuten, welcher das Verhältniß $\Delta^n y : \Delta x^n$ der nten Differenz der Function y gegen die nte Potenz der Differenz Δx der absoluten veränderlichen Größe sich nähern müßte, wenn Δx allmählich abnähme: und so wie dy den Exponenten des ersten Differentialverhältnisses von y bedeutete; eben so kann $d^n y$ überhaupt den Exponenten des nten Differentialverhältnisses von y bedeuten.

Und nun kann man darthun, daß $d^{r+1} y = d.d^r y$ seyn muß, wie im (79. §.). Denn für jede Function y von einer absoluten veränderlichen Größe x kann man folgende Ausdrücke festsetzen (II. Band. 14. §.).

$$\Delta^r y = P \Delta x^r + Q \Delta x^{r+1};$$
$$\Delta P = p \Delta x + \varphi \Delta x^2;$$
$$\Delta^{r+1} y = p \Delta x^{r+1} + L \Delta x^{r+2}.$$

Also wird man haben:

I. $\Delta^r y : \Delta x^r = (P + Q \Delta x) : 1.$

II. $\Delta P : \Delta x = (p + \varphi \Delta x) : 1.$

III. $\Delta^{r+1} y : \Delta x^{r+1} = (p + L \Delta x) : 1.$

Da also Q, φ, L, wenn sie von Δx abhängen, gewiß unter die Form $\beta + \gamma \Delta x + \delta \Delta x^2 +$ etc. gehören, und P, p von Δx gar nicht abhängen (a. a. O.); so ist offenbar, daß, wenn Δx nach (47. §.) abnähme, das Verhältniß I) der

Gränze P:1, das Verhältniß II.) der Gränze p:1, und das Verhältniß III) der Gränze p:1 sich nähern würde (51. §.): also ist, nach der Erklärung, P:1 das rte Differentialverhältniß von y und p ist sowohl das erste Differentialverhältniß von P, als das (r+1)te von y; daher

$$d^r y = P,\ dP = p,\ d^{r+1} y = p,$$

mithin $d^{r+1} y = dP = d.dy$.

82. §.

Erklärung. Zwo veränderliche Größen hängen von einander ab, wenn sie in einer solchen Verbindung unter einander stehen, daß durch jede Aenderung der einen, eine gewisse Aenderung bey der andern hervorgebracht wird: hingegen sind zwo veränderliche Größen von einander unabhängig, wenn jede unter ihnen geändert werden kann, ohne daß dadurch irgend eine Aenderung bey der andern hervorgebracht wird.

83. §.

1. Zusatz. Jede unter zwoen von einander abhängigen veränderlichen Größen u, v kann als eine Function von der andern betrachtet werden (82. §.): daher wird entweder eine unter ihnen eine absolute veränderliche Größe; und die andere eine Function von ihr, oder jede eine Function von irgend einer absoluten veränderlichen Größe x seyn müssen (40. §.).

84. §.

2. Zusatz. Jede Function y von zwoen von einander abhängigen veränderlichen Größen u, v, muß als eine Function betrachtet werden, die sich auf eine absolute veränderliche Größe bezieht (83. §.): die vorhergehende Lehre von

Diffe-

Differentialverhältnissen gilt also für alle Functionen y von zwoen von einander abhängigen veränderlichen Größen u, v.

85. §.

3. Zusatz. Jede Function y von zwoen von einander unabhängigen veränderlichen Größen u, v muß hingegen als eine Function betrachtet werden, welche sich auf zwo absolute veränderliche Größen bezieht, so daß entweder jede der Größen u, v eine absolute veränderliche Größe, oder eine darunter, etwa u, eine absolute veränderliche Größe, und die andere v eine Function von irgend einer absoluten veränderlichen Größe x, oder auch u eine Function von einer andern absoluten veränderlichen Größe z ist. (82. 40. §.)

86. §.

4. Zusatz. Es ist also nicht gestattet, wenn y eine Function von zwoen von einander unabhängigen veränderlichen Größen u, v seyn soll, y und u, v als drey Functionen von einer einzigen absoluten veränderlichen Größe x, oder x, und eine der veränderlichen Größen u, v, etwa u, als zwo Functionen von der andern veränderlichen Größe v zu betrachten. (85. §.)

87. §.

Erklärung. Wenn u, v zwo von einander unabhängige veränderliche Größen sind, so kann jede darunter zu- oder abnehmen, ohne daß deswegen auch die andere irgend eine Aenderung leide. (82. §.) Hat man demnach eine Function y von zwoen veränderlichen Größen u, v; so kann man bey ihr u als veränderlich, und v als unveränderlich, oder v

als veränderlich, und u als unveränderlich betrachten, als wenn y nur von u oder nur von v eine Function wäre: den Exponenten des Differentialverhältnisses, welches der Function y zugehören würde, wenn man bey ihr nur u, oder nur v für veränderlich annähme, wird man mit ^{u}dy oder ^{v}dy bezeichnen können. Wenn aber beyde Größen u und v, wie sie es wirklich sind, als veränderlich bey ihrer Function y angenommen werden: so soll die Summe der Differentialverhältnisse, welche der Function y zugehören müßten, wenn bey ihr u allein, oder v allein veränderlich wäre, das der Function y für beyde veränderliche Größen zugehörige Differentialverhältniß heißen, und sein Exponent mit ^{uv}dy bezeichnet werden.

88. §.

Lehrsatz. Der Exponent des einer Function y von zwoen veränderlichen Größen u, v für diese beyden Größen zugehörigen Differentialverhältnisses ist der Summe der Exponenten derjenigen Differentialverhältnisse gleich, welche der Function y zugehören würden, wenn bey ihr nur u, oder nur v veränderlich wäre: oder es ist $^{uv}dy = {}^{u}dy + {}^{v}dy$. (87. §.)

Beweis. Dieses folgt aus der gegebnen Erklärung, (87. §.) wenn es überhaupt wahr ist, daß der Exponent eines Verhältnisses, welches die Summe zweyer andern Verhältnisse seyn soll, der Summe der Exponenten dieser Verhältnisse gleich ist, welches aber mit der Lehre von zusammengesetzten Verhältnissen, wie sie in vielen der besten Lehrbücher vorgetragen wird, im Widerspruche zu stehen scheint: ich darf es daher ohne Beweis nicht annehmen.

1. Es seyen drey gleichartige Größen A, B, C. Ziehe man nun die geometrischen Verhältnisse der Größen A, B gegen die dritte Größe C in Betrachtung; so untersucht man eigentlich, wieviel A, und wieviel B von C enthält, oder wie man sich gewöhnlich ausdrückt, wie oft C oder irgend ein aliquoter Theil davon in A, und wie oft in B steckt: dieses heißt die Größe von A, und die von B durch die Größe von C und eben dadurch auch das Verhältniß von A, und das von B gegen C bestimmen.

2. Daraus (1) folgt, daß, wenn A mehr als B von C enthält, wenn z. B. die ganze Größe C oder ein aliquoter Theil davon in A mehrmal als in B steckt, A gegen C größer ist, als B gegen C, das Verhältniß von A gegen C größer ist, als das von B gegen C: und wenn man fände, daß A mmal soviel als B von C enthält, daß z. B. irgend ein aliquoter Theil von C mmal so oft in A als in B steckt; so müßte man sagen, A sey gegen C mmal größer als B gegen C, oder das Verhältniß von A gegen C sey mmal größer als das von B gegen C.

3. Nun soll der Exponent des Verhältnisses einer Größe X gegen eine andere Z nichts anders als eine Zahl seyn, welche dadurch, daß sie von der Einheit 1 soviel enthält, wieviel enthält X von Z, anzeigen soll, wieviel eigentlich X von Z enthält: sagt man z. B. die ganze Zahl m oder die gebrochene $\frac{m}{n}$ sey der Exponent des Verhältnisses von X gegen Z; so sagt man dadurch nichts anders, als daß dieselbe Zahl anzeiget, Z ganz, oder ein ntel davon stecke mmal in X.

4. Findet man also, daß der Exponent des Verhältnisses von A gegen C mmal größer ist, als der Exponent des Verhältnisses von B gegen C; so wird man daraus erkennen, daß jenes Verhältniß ebenfalls mmal größer ist als dieses. (2) 3).

5. Allerdings darf man die Verhältnisse mit ihren Exponenten nicht verwechseln (eben so wenig, als es gestattet ist, die geradlinichten Winkel mit den aus ihren Spitzen und zwischen ihren Schenkeln beschriebenen Kreisbogen zu verwechseln): wenn man doch zwey Verhältnisse A:C, B:C, als Verhältnisse mit einander vergleichen will; so darf man wohl sagen, sie verhalten sich gegen einander gerade wie ihre Exponenten, und zwar aus Gründen (1) 2) 3) 4).

6. Wird nun das Wort Summe im ächten Verstande genommen; so muß zuerst die Summe der Verhältnisse A:C, B:C gewiß ein Verhältniß X:x seyn; es muß ferner dieses Verhältniß sich gegen die einzelnen Verhältnisse A:C, B:C eben so, wie ein aus zweenen Theilen bestehendes Ganze gegen dieselben einzeln genommenen Theile, verhalten; also muß auch der Exponent der Summe X:x sich gegen die einzelnen Exponenten der Verhältnisse A:C, B:C, wie ein aus zweenen Theilen bestehendes Ganze gegen dieselben einzeln genommenen Theile verhalten (4); mithin muß er die Summe dieser Exponenten seyn.

7. Demnach, weil $^{u}dy:1$, $^{v}dy:1$, $^{uv}dy:1$ die Differentialverhältnisse seyn sollen, welche der Function y zugehören müssen, wenn bey ihr nur u, oder nur v, oder sowohl u als v als veränderlich betrachtet wird, und weil das letzte die Summe der beyden übrigen Verhältnissen seyn soll (87. §.) so ist auch $^{uv}dy = {}^{u}dy + {}^{v}dy$ nach (6).

An-

Anmerkung. Aus dem gegebenen Beweise lassen sich folgende Sätze herleiten, worauf einige der wichtigsten Anwendungen der Differentialverhältnisse beruhen.

I. Aus (N. 1. 2.) des Beweises erhellet, daß das Verhältniß A:C einer Größe A gegen eine andere C um so größer oder kleiner ist, je größer oder kleiner die Größe A ist bey einerley Größe C.

II. Aus (N. 5.) erhellt ferner, daß überhaupt zwey Verhältnisse, als Verhältnisse, etwa K:L, M:N sich gegen einander gerade wie ihre Exponenten $\frac{K}{L}$, $\frac{M}{N}$ verhalten.

III. Aus (N. 6.) erhellt endlich, daß überhaupt die Summe zweyer Verhältnisse, als Verhältnisse, ein Verhältniß seyn muß, dessen Exponent der Summe der Exponenten jener Verhältnisse gleich ist.

IV. Hieraus folgt aber nothwendig, daß die Differenz zweyer Verhältnisse ein Verhältniß seyn muß, dessen Exponent der Differenz der Exponenten jener Verhältnisse gleich ist.

Der scheinbare Widerspruch, in welchem diese Sätze (III) IV) mit der Lehre von zusammengesetzten Verhältnissen, wie sie in den besten Lehrbüchern abgehandelt wird, stehen, verschwinden sogleich, sobald man annimmt, daß das Wort Summe bey dieser Lehre, nicht, wie hier, in der sonst gewöhnlichen ächten Bedeutung genommen wird.

V. Wenn eine bestimmte Geöße U die Gränze einer sich allmählich ändernden Größe Z ist; so muß, wenn P sich nicht ändert, das Verhältniß U:P die Gränze des sich ändernden Verhältnisses Z:P seyn.

1) Sey

1) Sey u eine wie immer kleine Größe, und u:P ein wie immer kleines Verhältniß (I.).

2) Der Unterschied der Verhältnisse Z:P, U:P sey das Verhältniß $\varphi:\mu$ (IV.), dessen Exponent der Differenz $\frac{Z}{P}-\frac{U}{P}=\frac{Z-U}{P}$, oder $\frac{U}{P}-\frac{Z}{P}=\frac{U-Z}{P}$ der Exponenten jener Verhältnisse gleich seyn muß (IV.): da also $\frac{u}{P}$ der Exponent des Verhältnisses u:P in (1) ist; so verhält sich das Verhältniß $\varphi:\mu$ gegen das Verhältniß u:P, wie $\frac{Z-U}{P}$, oder $\frac{U-Z}{P}$ gegen $\frac{u}{P}$, daher wie Z—U oder U—Z gegen u (II.). Da also Z—U, oder U—Z kleiner werden kann, als jede denkbare wie immer kleine Größe u in (1) wegen (48. §.); so kann auch der Unterschied $\varphi:\mu$ der Verhältnisse Z:P, U:P kleiner werden, als jedes denkbare, wie immer kleine Verhältniß u:P in (1), und eben deswegen ist das bestimmte Verhältniß U:P die Gränze des veränderlichen Verhältnisses Z:P (50. §.).

VI. Bey derselben Voraussetzung, daß U die Gränze der sich allmählich ändernden Größe Z ist, muß das Verhältniß P:U die Gränze des sich mit Z allmählich ändernden Verhältnisses P:Z seyn.

1) Wir wollen annehmen, Z sey beständig grösser als P: der Beweis für den Fall, wenn Z beständig kleiner ist als P, bleibt derselbe. Sey u, daher auch $\frac{u}{P}$ eine wie immer kleine Größe, mithin u:P ein wie immer kleines Verhältniß (I.).

2) Der

2) Der Unterschied $\varphi:\mu$ der Verhältnisse P:U, P:Z verhält sich gegen das Verhältniß u:P, wie $\frac{P}{U} - \frac{P}{Z}$ gegen $\frac{u}{P}$ (IV. II.), daher wie $\frac{P(Z-U)}{UZ}$ gegen $\frac{u}{P}$. Es mag aber u, und damit auch $\frac{uUZ}{P^2}$ wie immer klein gedacht werden; so muß doch Z — U noch kleiner werden können (48. §.), nämlich $Z-U < \frac{uUZ}{P^2}$, und eben deswegen auch $\frac{P(Z-U)}{UZ} < \frac{u}{P}$: also kann auch der Unterschied $\varphi:\mu$ der Verhältnisse P:U, P:Z kleiner werden, als jedes wie immer kleine Verhältniß u:P in (1), zum Beweis, daß das bestimmte Verhältniß P:U die Gränze des veränderlichen P:Z ist. (50. §.).

89. §.

1. Zusatz. Für jede Function y von zwoen veränderlichen Größen u, v müssen gewisse von du, dv unabhängige, und durch y vollkommen bestimmte Größen M, N möglich seyn, für welche nach (60. 87. 88. §.) wäre

$$^{u}dy = M\,du;\quad ^{v}dy = N\,dv;$$
$$^{uv}dy = M\,du + N\,dv.$$

90. §.

2. Zusatz. Will man den Exponenten ^{uv}dy des einer Function y für beyde veränderlichen Größen u, v zugehörigen Differentialverhältnisses bestimmen; so suche man nach der vorhergehenden Theorie die Exponenten derjenigen Differentialverhältnisse, welche der Function y zugehören müßten,

müßten, wenn man bey ihr nur u, sodann nur v für veränderlich annähme, und drücke ^{uv}dy durch die Summe dieser Exponenten aus. (88. §.)

91. §.

3. Zusatz. Nach (90. §.) kann man allemal verfahren, auch alsdann, wenn die veränderlichen Größen u, v von einander abhängen. Denn man kann jede Function von was immer für veränderlichen Größen u, v, wegen (31. §.), durch

I. $y = Au^{\alpha}v^{a} + Bu^{\beta}v^{b} + Cu^{\gamma}v^{c} + \text{etc.}$

ausdrücken, woraus, nachdem man nur u, oder nur v für veränderlich annimmt, folgt nach (60. §.):

II. $^{v}dy = (aAu^{\alpha}v^{a-1} + bBu^{\beta}v^{b-1} + cCu^{\gamma}v^{c-1} + \text{etc.})dv,$

III. $^{u}dy = (\alpha Av^{a}u^{\alpha-1} + \beta Bv^{b}u^{\beta-1} + \gamma Cv^{c}u^{\gamma-1} + \text{etc})du.$

Nimmt man aber an, daß die veränderlichen Größen u, v von einander abhängen; so muß in I) nach (84. 64. 73. 72. 71. §.) seyn.

$$\begin{aligned} ^{uv}dy = {} & \alpha Av^{a}u^{\alpha-1}du + aAu^{\alpha}v^{a-1}dv \\ & + \beta Bv^{b}u^{\beta-1}du + bBu^{\beta}v^{b-1}dv \\ & + \gamma Cv^{c}u^{\gamma-1}du + cCu^{\gamma}v^{c-1}dv \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \end{aligned}$$

Daher ist $^{uv}dy = {}^{u}dy + {}^{v}dy$, wie wenn u, v zwo von einander unabhängige veränderliche Größen wären. (87. 88. §.)

92. §.

4. Zusatz. Setzet man in (91. §.)

$M = \alpha Av^{a}u^{\alpha-1} + \beta Bv^{b}u^{\beta-1} + \gamma Cv^{c}u^{\gamma-1} + \text{etc.};$

$N = aAu^{\alpha}v^{a-1} + bBu^{\beta}v^{b-1} + cCu^{\gamma}v^{c-1} + \text{etc.};$

so

so ist $\frac{{}^{v}dM}{dv} = \frac{{}^{u}dN}{du}$ (84. 64. 71. 72. §.).

Es mag also y was immer für eine Function von zwoen veränderlichen Größen u, v seyn; so giebt es für sie ein Differentialverhältniß, dessen Exponent überhaupt durch ${}^{uv}dy = Mdu + Ndv$ kann ausgedrückt werden (89. §.), und dabey sind M, N allemal solche Functionen von u, v daß dafür in der Bedeutung (87. §.) $\frac{{}^{v}dM}{dv} = \frac{{}^{u}dN}{du}$ seyn muß (91. §.).

93. §.

Erklärung. Das Differentialverhältniß des Exponenten ${}^{uv}dy$ der einer Function y von zwoen veränderlichen Größen u, v für diese beyden Größen zugehörigen Differentialverhältnisses, welches ihm als einer Function von denselben veränderlichen Größen u, v zugehören mag, soll das **Differentio-Differentialverhältniß**, oder das **Differentialverhältniß der zweyten Ordnung** von der Function y heißen, dessen Exponenten man mit ${}^{uv}d^2y$, oder schlechthin mit d^2y bezeichnen kann.

94. §.

1. **Zusatz.** Das Differentio-Differentialverhältniß einer Function y von zwoen veränderlichen Größen u, v ist in Ansehung der Exponenten dy ihres Differentialverhältnisses das, was dieses Differentialverhältniß in Ansehung der Function y seyn soll (93. 87. §.): also ist ${}^{uv}d.dy = {}^{u}d.dy + {}^{v}d.dy$ der Exponent ${}^{uv}d^2y$ des Differentio-Differentialverhältnisses von y (88. §.), das heißt: man findet den Exponenten d^2y des Differentio-Differentialverhältnisses

jeder

jeder Function y von zween veränderlichen Größen u, v, wenn man die Exponenten der Differentialverhältniſſe in eine Summe bringet, welche dem Exponenten ^{uv}dy (87. §.) als einer Function von u, v zugehören würden, wofern man bey ihm u allein, oder v allein für veränderlich annähme.

Z. B. Sey $y = u^2v$.

Denkt man ſich v als eine beſtändige Größe; ſo iſt:

I. $^{u}dy = vd.u^2$ (63. §.) $= 2vudu$.

Denkt man ſich aber u als eine beſtändige Größe; ſo iſt:

II. $^{v}dy = u^2dv$ (63. §.).

Aus (I.) (II.) erhält man alſo nach (90. §.)

III. $^{uv}dy = 2vudu + u^2dv$.

Nimmt man nun an, v in (III.), mithin auch dv ſey unveränderlich; ſo muß man ſich (III) als eine Function von einer veränderlichen Größe u denken, wovon du vielleicht eine Function iſt (61. §.). Daher iſt

$$^{u}d.dy = 2vd.udu + dvd.u^2:$$

nun iſt $d.udu = dudu + uddu$ (73. §.)

$$= du^2 + ud^2u;$$

und $d.u^2 = 2udu$. Alſo

IV. $^{u}d.dy = 2vdu^2 + 2vud^2u + 2ududv$.

Nimmt man hingegen an, nur v ſey veränderlich in (III); ſo muß man ſich (III) als eine Function von einer veränderlichen Größe v denken, wovon dv vielleicht eine Function iſt. Demnach iſt

V. $^{v}d.y = 2ududv + u^2d^2v$.

Aus (IV.) (V.) erhält man alſo:

VI.

VI. $^{uv}d^2y = 2vdu^2 + 2vudu^2 + 2ududv$
$+ 2ududv + u^2d^2v$,
$= 2vdu^2 + 2vud^2u + 4ududv + u^2d^2v$.

Da es aber möglich ist, daß eine unter den veränderlichen Größen u, v, etwa u eine absolute veränderliche Größe ist; so nehmen wir u wirklich für eine solche Größe an. Bey dieser Voraussetzung ist $du = 1$ (55. §.), daher $d^2u = 0$ (79. 53. §.) in (IV), mithin

$^{v,uv}d^2y = 2vdu^2 + 4ududv + u^2d^2v$ in (VI.).

Wäre aber v eine absolute veränderliche Größe, daher $dv = 1$ (55. §.), und $d^2v = 0$ (79. 53. §.) in (V); so hätte man

$^{uv}d^2y = 2vdu^2 + 2vud^2u + 4ududv$ in (VI.).

Wäre endlich sowohl u als v eine absolute veränderliche Größe, folglich $du = 1$, $dv = 1$, $d^2u = 0$, $d^2v = 0$ in (IV) V); so hätte man

$^{uv}d^2y = 2vdu^2 + 4ududv$ in (VI.).

95. §.

2. Zusatz. Weil es für jede Function y von zween veränderlichen Größen u, v ein Differentialverhältniß giebt, dessen Exponent durch $dy = Mdu + Ndv$ kann ausgedrückt werden (89. §.); so wird es für sie auch ein Differentio-Differentialverhältniß geben, dessen Exponent $d^2y = Md^2u + {}^ud M . du + {}^vdM . du + N . d^2v + {}^vdN . dv + {}^udN . dv$ ist (94. §.).

96. §.

3. Zusatz. Da es aber gewisse von du, dv unabhängige Functionen p, q, r, s, geben muß, für welche $^udM = pdu$,

${}^{v}dM = qdv$, ${}^{u}dN = rdu$, ${}^{v}dN = sdv$ ist (61. §.); so ist einleuchtend, daß es für jede Function y von zwoen veränderlichen Größen u, v ein Differential- und Differentio-Differentialverhältniß geben muß, so daß der Exponent des ersten, wie in (I.), und der des zweyten, wie in (II.) kann ausgedrückt werden (95. §.).

I. $dy = Mdu + Ndv$.

II. $d^2y = Md^2u + Nd^2v + kdudv + pdu^2 + sdv^2$.

Für $p = \frac{{}^{u}dM}{du}$; $q = \frac{{}^{v}dM}{dv}$; $r = \frac{{}^{u}dN}{du}$; $s = \frac{{}^{v}dN}{dv}$;

$k = q + r$.

97. §.

4. Zusatz. Wenn aber der Exponent dv des ersten Differentialverhältnisses von der veränderlichen Größe v unveränderlich ist, mithin $d.dv = d^2v = 0$ (53. §.); so ist in (96. §.)

$d^2y = Md^2u + kdudv + pdu^2 + sdv^2$.

98. §.

5. Zusatz. Wären hingegen die Exponenten du, dv der ersten Differentialverhältnisse beyder veränderlichen Größen u, v unveränderlich; so wäre $d^2u = 0$ und $d^2v = 0$: also in (96. §.)

$d^2y = kdudv + pdu^2 + sdv^2$.

99. §.

6. Zusatz. Es kann geschehen, daß für irgend eine Constante c, und eine Function φ von v, u, $N = \varphi + c$ in (96. §.) ist: da aber in diesem Fall ${}^{u}dN = {}^{u}d\varphi$, und ${}^{v}dN = {}^{v}d\varphi$ seyn müßte (62. §.); so wäre eigentlich

dy

$dy = Mdu + (\varphi + c)dv$ in (96. §.), aber $d^n y$ würde ganz unabhängig von cdv seyn, wenn dabey dv unveränderlich wäre (96. 97. 98. §.)

100. §.

Erklärung. Das Integral des gegebenen Exponenten eines Differentialverhältnisses suchen, oder den Exponenten eines Differentialverhältnisses integriren, soll nichts anders bedeuten, als diejenige Function suchen, deren Differentialverhältnisses Exponent dem gegebenen Exponenten gleich ist.

101. §.

1. Zusatz. Was im zweyten Bande ein Verschwindungsquotient war, das ist hier der Exponent eines Differentialverhältnisses: die Exponenten der ersten Differentialverhältnisse aller Functionen von einer veränderlichen Größe können also nach (II. Band. I. II. III. Abschnitt) integrirt werden (100. §.).

102. §.

2. Zusatz. Und jeder Exponent $d^n y$ jedes nten Differentialverhältnisses einer Function y von einer veränderlichen Größe (79. §.) kann nach (II. Band. 65. §.) integrirt werden (100. §.).

103. §.

3. Zusatz. Die vorhergehende Lehre (82 ... 92. §.) von den Exponenten der ersten Differentialverhältnisse, welche gewissen Functionen von zween veränderlichen Größen zugehören, läßt sich an die Stelle der in (II. Band. 59. §. 1. 2. 3. Zusatz.) setzen, und die Integrirung derselben Exponenten nach (II. Band. 60. §.) vornehmen. (100. §.)

104. §.

4. Zuſatz. Will man hingegen den Exponenten $^{uv}d^2y$ eines Differentio-Differentialverhältniſſes, welches einer Function y von zween veränderlichen Größen u, v zugehören ſoll, integriren; ſo ſuche man zuerſt den Exponenten ^{uv}dy des erſten Differentialverhältniſſes von y, ſodann die Function y ſelbſt nach (103. §.): denn es iſt ^{uv}dy das unmittelbare Integral von $^{uv}d^2y$, nämlich $^{uv}dy = \int {}^{uv}d^2y$ (93. 100. §.).

105. §.

5. Zuſatz. Wenn demnach ein Exponent $^{uv}d^2y$ die Form einer Reihe hat, worin die Exponenten d^2u, d^2v mit was immer für Größen multiplicirt vorkommen mögen, etwa Md^2u, Nd^2v; ſo nehme man die Factoren M, N von d^2u, d^2v, und ſetze das Integral $\int {}^{uv}d^2y = Mdu + Ndv = dy$ (96. §.), hernach ſuche man y daraus (104. §.). Doch vergeſſe man nicht zu prüfen, ob dy auf dieſe Art richtig iſt beſtimmt worden: daher differentiire man den gefundenen Exponenten dy für beyde veränderliche Größen u, v (94. §.), und ſehe, ob dadurch der gegebene Exponent d^2y wirklich hergeſtellt wird (100. 104. §.).

Beyſpiele.

Sey $d^2y = vd^2u + 2dudv + ud^2v$.

Die Factoren von d^2u, d^2v ſind v und u: es ſoll alſo ſeyn:

I. $dy = vdu + udv$;

und nun nach (II. Band. 60. §.

II. $y = uv + C$.

Daß

Daß (I.) seine Richtigkeit hat, konnte dadurch bewiesen werden, weil (I.) für beyde veränderliche Größen u, v, wovon du, dv gewisse Functionen seyn sollen, nach (94. §.) differentiirt, den gegebenen Exponenten d^2y herstellt: dergleichen Prüfungen werde ich aber bey folgenden Beyspielen voraussetzen.

Sey $d^2y = 3u^2v^2d^2u + 6uv^2du^2 + 12u^2vdudv + 2u^3vd^2v + 2u^3dv^2$.

Die Factoren von d^2u, d^2v sind hier $3u^2v^2$ und $2u^3v$: also soll seyn:

$$dy = 3u^2v^2du + 2u^3vdv,$$

und nun nach (II. Band. 60. §.).

$$y = v^2u^3 + C.$$

Sey $d^2y = 3u^2vd^2u + 6uvdu^2 + 6u^2dudv + u^3d^2v + 2vd^2v + 2dv^2$.

Wegen der Factoren $3u^2v$, und $u^3 + 2v$ von d^2u und d^2v soll seyn:

$$dy = 3u^2vdu + (u^3 + 2v)dv,$$

und nun nach (II. Band. 60. §.).

$$y = vu^3 + v^2 + C.$$

Bisweilen kömmt ein solcher Exponent, durch den Exponenten des ersten Differentialverhältnisses einer absoluten veränderlichen Größe dividirt vor, so daß, wenn man jenen Exponenten mit ^{uv}dU, und diesen mit dx bezeichnet, der gegebene Exponent die Form eines Bruches $\frac{^{uv}dU}{dx}$ hat. In solchen Fällen sind gemeiniglich u, v gewisse Functionen von x, und $dx = 1$ (55. §.) constans, das Integral selbst ist aber $\frac{\int^{uv}dU}{dx}$.

Z. B. Sey $dV = \frac{ud^2v + ad^2u - vd^2u}{dx}$;

so ist $V = \frac{\int(ud^2v + ad^2u - vd^2u)}{dx}$.

Wegen der Factoren u, a−v von d^2v und d^2u aber findet man

$$\int(ud^2v + ad^2u - vd^2u) = udv + (a-v)du;$$

also $V = \frac{udv + (a-v)du}{dx} + C.$

106. §.

6. Zusatz. Wenn bey dem gegebenen Exponenten d^2y, von der in (105. §.) betrachteten Form, der Exponent des zweyten Differentialverhältnisses einer veränderlichen Größe, u oder v, etwa der Exponent d^2v fehlet; so ist dieses ein Zeichen, daß dv beym Exponenten dy des Differentialverhältnisses von y unveränderlich war (96. 97. §.) Daher, um dy daraus zu erhalten, nehme man den Factor, etwa P, welchen d^2u vor sich hat, und den Factor, etwa T, des Quadrats dv^2 des beständigen Exponenten dv; integrire Tdv für die veränderliche Größe v, und setze $dy = Pdu\,dv\int Tdv$: hernach differentiire dieses nach (94. §.) für beyde veränderliche Größen u, v und beständigen Exponenten dv. Ist nun das, was die Differentiation giebt, dem gegebenen Exponenten d^2y gleich; so hat man dy richtig bestimmt (100. 104. §.); sonst ziehe man es vom gegebenen Exponenten d^2y ab; integrire den Rest für die veränderliche Größe u, oder v, welches X geben mag; und setze Xdv im ersten, oder Xdu im zweyten Fall, zu $Pdu + dv\int Tdv$:

die

die Summe soll dy geben, wofern sie die Prüfung nach (94. §.) aushält. Uebrigens muß man allemal noch eine Constante Cdv hinzusetzen: alles aus Gründen (96. 97. 99. §.).

Beyspiele.

Sey $d^2y = d^2u + 2dv^2$.

Es ist $dy = 1.du + dv/2dv$

$= du + 2vdv + Cdv.$

Und nun nach (II. Band. 60. §.)

$y = u + v^2 + Cv + D.$

Für $d^2y = v^2d^2u + 4vdudv + 2udv^2$,

ist $dy = v^2du + dv/2udv$

$= v^2du + 2uvdv + Cdv.$

Daher nach (II. Band. 60. §.)

$y = uv^2 + Cv + D.$

Sey $d^2y = vd^2u + 2dudv.$

Es sollte seyn:

$dy = vdu + dv/0, dv = vdu.$

Es ist aber

$^{uv}d.vdu = vd^2u + dudv,$

$d^2y - {}^{uv}d.vdu = dudv,$

und $^u/dudv = dv/du = udv:$

also setze man

$dy = vdu + udv + Cdv$

welches die Prüfung nach (94. §.) aushält. Daher ist nach (II. Band. 60. §.)

$y = uv + Cv + D.$

Sey $d^2y = 10uvd^2u + 10vdu^2 + 20ududv + 6vdv^2.$

Hier soll seyn

$$dy = 10uvdu + dv\int 6vdv$$
$$= 10uvdu + 3v^2dv.$$

Es ist aber

$$d^2y - {}^{uv}d(10uvdu + 3v^2dv) = 10ududv,$$

und ${}^{u}\int 10ududv = dv\int 10udu = 5u^2$;

also setze man

$$dy = 10uvdu + (3v^2 + 5u^2 + C)dv,$$

welches die Prüfung nach (94. §.) aushält. Nach (II. B. 60. §.) ist demnach:

$$y = 5vu^2 + v^3 + Cv + D.$$

107. §.

7. Zusatz. Gehen bey dem gegebenen Exponenten d^2y die Exponenten d^2u, d^2v der Differentio-Differentialverhältnisse beyder veränderlichen Größen u, v ab; so zeigt dieses an, daß beyde Exponenten du, dv ihrer ersten Differentialverhältnisse unveränderlich sind. Daher nehme man die Factoren ihrer Quadrate, etwa S, T, wenn Sdu^2, Tdv^2 bey ^2dy vorkömmt; integrire Sdu für die veränderliche Größe u, und Tdv für die veränderliche Größe v; setze hierauf $dy = \int Sdu + \int Tdv$, welches ganz richtig seyn wird, wofern es die Prüfung nach (94. §.) aushält: sonst ziehe man ${}^{uv}d(\int Sdu + \int Tdv)$ vom gegebenen Exponenten d^2y ab; integrire den Rest bloß für die veränderliche Größe u, oder für v, damit das Integral, für irgend eine Größe X, Xdv im ersten, und Xdu im zweyten Falle gebe; die Summe $\int Sdu + \int Tdv + Xdv$ (oder Xdu) wird dy geben, wenn sie die Prüfung nach (94. §.)

aus-

ausfällt. Indessen muß man dazu allemal noch zwo Constanten Cdu, Ddv nehmen: alles aus Gründen (96. 98. 99. §§.

Beyspiele.

Sey $d^2y = 42u^7v^3du^2 + 42u^6v^2dudv + 6u^7vdv^2$.

$dy = du\int 42u^5v^3du + dv\int 6u^7vdv$

$= 7u^6v^3du + 3u^7v^2dv + Cdu + Ddv$

Daher nach (II. Band. 60. §.)

$y = u^7v^3 + Cu + Dv + E$.

Sey $d^2y = 2dv^2$.

Hier ist $dy = dv\int 2dv + du\int 0.du$

$= 2vdv + Cdu + Ddv$.

Und nun nach (II. Band. 60. §).

$y = v^2 + Cu + Dv + E$.

Sey $d^2y = 10vdu^2 + 20ududv + 6vdv^2$.

Hier sollte seyn

$dy = du\int 10vdu + dv\int 6vdv$,

$= 10vudu + 3v^2dv$.

Es ist aber

$d^2y - {}^{uv}d(10vudu + 3v^2dv) = 10ududv$,

und $dv\int 10udu = 5u^2dv$;

also setze man

$dy = 10vudu + 3v^2dv + 5u^2dv + Cdu + Ddv$.

Und nun nach (II. Band. 60. §.)

$y = 5u^2v + v^3 + Cu + Dv + E$.

108. §.

8. Zusatz. Außer den Exponenten d^2y von der bisher betrachteten Form kommen bey der Anwendung der Differential-

rentialrechnung auf die Auflösung mathematischer Aufgaben solche Exponenten vor, mit welchen man zuerst verschiedene Verwandlungen vornehmen muß, die Methode, nach welcher sie sich mögen integriren lassen, zu entdecken. In manchen Fällen wird man die Exponenten du, dv als veränderliche Größen mit einzelnen Buchstaben bezeichnen können, wodurch z. B. du=z, dv=t, daher $d^2u=dz$ und $d^2v=dt$ erhalten wird; und wenn dieses bey dem gegebenen Exponenten d^2y geschieht; so wird bisweilen d^2y die Form eines Exponenten dZ des ersten Differentialverhältnisses erhalten, da dann alles noch darauf ankommen muß, daß er sich nach der im zweyten Bande für solche Differentialexponenten bereits gegebenen Anleitung integriren lasse. Zuweilen erreicht man dieselbe Absicht, wenn man gewisse Quotienten, wie $\frac{du}{dx}$ als veränderliche Größen betrachtet, vorzüglich alsdann, wenn man weiß, daß dx constans ist, in welchem Fall $\frac{d^2u}{dx}=dz$ für $\frac{du}{dx}=z$ seyn würde.

Z. B. Bey $d^2y=dudv+ud^2v$, weil du constans ist, kann man dv=z, $d^2v=dz$ setzen, welches $d^2y=zdu+udz$ giebt; und hieraus erhellet schon nach (73. 100. §.), daß $\int d^2y=\int(zdu+udz)$, oder $dy=zu=udv=udv+Cdu$ (99. §.) seyn muß.

Bey $dV=\frac{dyd^2x-dxd^2y}{dy^3}$ könnte man dx=u, dy=v, mithin $d^2x=du$ und $d^2y=dv$ nehmen, wofür man

man $dV = \frac{vdu - udv}{v^2}$, und hieraus $V = \frac{u}{v} = \frac{dx}{dy}$ erhalten würde.

109. §.

9. Zusatz. Die Umstände, in welchen die Integralien der Exponenten d^2y von der Form $d^2y = kdudv$ unmöglich sind, verdienen bemerkt zu werden. Für jede Function y von u, v muß $dy = Mdu + Ndv$, und $d^2y = pdu^2 + Kdudv + sdv^2$ seyn, wenn man annimmt, daß beyde du, dv unveränderlich sind, mithin $d^2u = o$ und $d^2v = o$ ist; es soll ferner $p = \frac{^udM}{du}$, $s = \frac{^vdN}{dv}$, $k = \frac{^vdM}{dv} + \frac{^udN}{du}$ seyn (96. §.). Soll also $d^2y = kdudv$ werden; so muß $\frac{^udM}{du} = o$ und $\frac{^vdN}{dv} = o$ seyn, welches nur alsdenn geschehen kann, wenn weder M von u, noch N von v abhängt: also muß

1) sowohl M als N eine beständige Größe; oder

2) M eine Function von v unabhängig von u, und N eine beständige Größe, oder M eine beständige Größe, und N eine von v unabhängige Function von u, oder

3) M eine Function von v, unabhängig von u, und N eine Function von u, unabhängig von v, seyn.

Das Erste (1) kann nicht Statt finden, weil sonst auch $k = o$ seyn würde, wegen $^vdM = o$, $^udN = o$. Es kann aber auch das Zweyte (2) nicht Statt finden, wenn d^2y integrabel ist: Denn es könnte bey der Voraussetzung (2) nicht $\frac{^vdM}{dv} = \frac{^udN}{du}$ seyn, welches doch allemal Statt haben soll

(92.

104. §.

4. Zusatz. Will man hingegen den Exponenten $^{uv}d^2y$ eines Differentio-Differentialverhältnisses, welches einer Function y von zween veränderlichen Größen u, v zugehören soll, integriren; so suche man zuerst den Exponenten ^{uv}dy des ersten Differentialverhältnisses von y, sodann die Function y selbst nach (103. §.): denn es ist ^{uv}dy das unmittelbare Integral von $^{uv}d^2y$, nämlich $^{uv}dy = \int {}^{uv}d^2y$ (93. 100. §.).

105. §.

5. Zusatz. Wenn demnach ein Exponent $^{uv}d^2y$ die Form einer Reihe hat, worin die Exponenten d^2u, d^2v mit was immer für Größen multiplicirt vorkommen mögen, etwa Md^2u, Nd^2v; so nehme man die Factoren M, N von d^2u, d^2v, und setze das Integral $\int {}^{uv}d^2y = Mdu + Ndv = dy$ (96. §.), hernach suche man y daraus (104. §.). Doch vergesse man nicht zu prüfen, ob dy auf diese Art richtig ist bestimmt worden: daher differentiire man den gefundenen Exponenten dy für beyde veränderliche Größen u, v (94. §.), und sehe, ob dadurch der gegebene Exponent d^2y wirklich hergestellt wird (100. 104. §.).

Beyspiele.

Sey $d^2y = vd^2u + 2dudv + ud^2v$.

Die Factoren von d^2u, d^2v sind v und u: es soll also seyn:

I. $dy = vdu + udv$;

und nun nach (II. Band. 60. §.

II. $y = uv + C$.

Daß

111. §.

Zusatz. Man kann sich die Vorstellung machen, daß jede Differentialgleichung $Mdu+Ndv=0$ aus einer Gleichung $Z=C$ zwischen den veränderlichen Größen u, v und einer Constante C (allenfalls auch $C=0$) entstehet, so daß ${}^{uv}dZ=Mdu+Ndv$ ist; und eben daraus auch eine Differentio-Differentialgleichung $Md^2u+Nd^2v+kdudv+pdu^2+sdv^2$ entstehet; so daß ${}^{uv}d^2Z={}^{uv}d.{}^{uv}dZ={}^{uv}d(Mdu+Ndv)=Md^2u+Nd^2v+kdudv+pdu^2+sdv^2$ ist (110. §.).

112. §.

Erklärung. Die Gleichung $Z=C$ zwischen den veränderlichen Größen u, v und einer Constante C, aus welcher eine Differential- oder Differentio-Differentialgleichung $dy=0$, oder $d^2y=0$ entstanden seyn mag, so daß diese durch ${}^{uv}dZ=0$ oder ${}^{uv}d^2Z=0$ vollkommen hergestellt wird, ist das Integral von $dy=0$ oder $d^2y=0$.

113. §.

1. Zusatz. Die Differentialgleichungen $Mdu+Ndv=0$ von der ersten Ordnung können also nach (II. Band. 61. 62. 63. 64. §.) integrirt werden: ist die daselbst gegebene Anleitung nicht hinreichend; so kann man doch die Integralgleichung (112. §.) wenigstens durch eine Näherung bestimmen.

114. §.

2. Zusatz. Die veränderlichen Größen u, v bey einer Differentialgleichung $Mdu+Ndv=0$ sind nämlich von einander abhängig, so daß eine unter ihnen, etwa u, als

eine

Z. B. Sey $dV = \frac{ud^2v + ad^2u - vd^2u}{dx}$;

so ist $V = \frac{\int(ud^2v + ad^2u - vd^2u)}{dx}$.

Wegen der Factoren u, a−v von d^2v und d^2u aber findet man

$$\int(ud^2v + ad^2u - vd^2u) = udv + (a-v)du:$$

$$\text{also } V = \frac{udv + (a-v)du}{dx} + C.$$

106. §.

6. Zusatz. Wenn bey dem gegebenen Exponenten d^2y, von der in (105. §.) betrachteten Form, der Exponent des zweyten Differentialverhältnisses einer veränderlichen Größe, u oder v, etwa der Exponent d^2v fehlet; so ist dieses ein Zeichen, daß dv beym Exponenten dy des Differentialverhältnisses von y unveränderlich war (96. 97. §.) Daher, um dy daraus zu erhalten, nehme man den Factor, etwa P, welchen d^2u vor sich hat, und den Factor, etwa T, des Quadrats dv^2 des beständigen Exponenten dv; integrire Tdv für die veränderliche Größe v, und setze $dy = Pdu\,dv\int Tdv$: hernach differentiire dieses nach (94. §.) für beyde veränderliche Größen u, v und beständigen Exponenten dv. Ist nun das, was die Differentiation giebt, dem gegebenen Exponenten d^2y gleich; so hat man dy richtig bestimmt (100. 104. §.); sonst ziehe man es vom gegebenen Exponenten d^2y ab; integrire den Rest für die veränderliche Größe u, oder v, welches X geben mag; und setze Xdv im ersten, oder Xdu im zweyten Fall, zu $Pdu + dv\int Tdv$:

die

115. §.

3. Zuſatz. Will man das Integral einer Differentio-Differentialgleichung $^{uv}d^2y = o$ ſuchen: ſo ſehe man, ob es nicht möglich iſt das Integral $\int^{uv} d^2y$ nach (105 — 109. §.) zu beſtimmen, woraus das Integral $\int^{uv} d^2y = o$ der gegebenen Gleichung $^{uv}d^2y = o$ entſtehen würde. (112. §.). Oder man verſuche, ob es nicht möglich iſt, durch gewiſſe Kunſtgriffe, wie z. B. die in (108. §.) erklärten ſind, der gegebenen Differentio-Differentialgleichung $^{uv}d^2y = o$ die Form einer Differentialgleichung $dZ = o$ zu geben: kann dieſes geſchehen, ſo wird man daraus $Z = o$ zum Integral nach (113. 114. §.) ſuchen können, und weil $Z = o$ eine Differentialgleichung von der erſten Ordnung iſt, ſo wird man auch dieſe nach (113. 114. §.) integriren können. In dem beſtimmten Fall, wenn bey einer Differentio-Differentialgleichung $^{uv}d^2y = o$ der Exponent dv des erſten Differentialverhältniſſes von einer veränderlichen Größe v unveränderlich, mithin $d^2v = o$ iſt, muß die andere veränderliche Größe u eine Function von v ſeyn (114. §.), und dieſe Function, ſo wie auch die Function v von u, welche aus jener durch Umkehrung entſtehen würde (II. Band. 10. §.), läßt ſich aus der gegebenen Gleichung $^{uv}d^2y = o$ nach einer beſondern Methode herleiten, welche, ob ſie gleich nicht allgemein iſt, in manchen Fällen ihre Anwendung findet: wir wollen daher die merkwürdigſten darunter bezeichnen.

116. §.

Aufgabe. Die Größen U, V, X ſind unabhängig von der veränderlichen Größe u, übrigens beſtän-

dige

dige Größen, oder was immer für Functionen von der veränderlichen Größe v, und zwar alle, oder einige: man soll die Function u von v suchen, für welche die Differentio-Differentialgleichung $d^2u + Ududv + Vdu^2 + Xdv^2 = 0$ Statt haben soll.

Auflösung. 1. Weil u eine Function von v ist, so setze man wegen (58. 79. 80. §.)

$$du = pdv,\ dp = qdv,\ d^2u = qdv^2.$$

2. Für diese Werthe von du und d^2u übergeht die gegebene Gleichung in

$$qdv^2 + Updv^2 + Vp^2dv^2 + Xdv^2 = 0:$$

also ist

$$q + Up + Vp^2 + X = 0,$$

$$q = -(Up + Vp^2 + X).$$

3. Aus (1) 2) erhält man $0 = dp + (Up + Vp^2 + X)\,dv$. Diese Gleichung enthält, vermöge der Voraussetzung, nur die veränderliche v bey U, V, X, p: sie soll sich daher nach der bekannten Theorie (113. 114. §.), wenigstens durch Näherung, integriren lassen. Fände man nun wirklich das Integral davon; so gäbe dieses p durch v, und wenn man hierauf denselben Ausdruck von p durch v in (1) nähme; so würde man auch $du = pdv$ nach der gemeinen Theorie integriren, und eben dadurch auch die verlangte Function u von v bestimmen können.

117. §.

1. Zusatz. Ist $U = V = 0$ in (116. §.), so hat man daselbst $dp = -Xdv$: also $p = C - \int Xdv$; und nun $du = Cdv - dv\int Xdv$. Bey jeder Differentio-Differentialgleichung von der Form

d^2u

$d^2u+Xdv^2=o$ iſt alſo

$$u=Cv-\int dv\int Xdv+B$$

für jede beſtändige Größe X, und jede Function X von v.

118. §.

2. Zuſatz. Seßt man $U=X=o$ in (116. §.); ſo findet man daſelbſt $d^2u+Vdu^2=o$, $du=pdv$, $dp=-Vp^2dv$: alſo iſt $\frac{dp}{p^2}=-Vdv$, mithin $p=\frac{1}{\int Vdv+C}$, und nun $du=\frac{dv}{\int Vdv+C}$. Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form

$$d^2u+Vdu^2=o \text{ iſt}$$

$$u=\int\frac{dv}{\int Vdv+C}+B,$$

es mag V eine beſtändige Größe, oder was immer für eine Function von v ſeyn.

Z. B. Für eine unveränderliche Größe $V=a$ wäre

$$d^2u+adu^2=o,$$

$$u=\int\frac{dv}{\int adv+C}+B=\int\frac{dv}{av+C}+B:$$

$$\text{alſo } u=\frac{1}{a}\text{Log. }(av+C)+B.$$

Für $V=av$ hätte man

$$d^2u+avdu^2=o,$$

$$u=\int\frac{dv}{\frac{a}{2}v^2+C}+B,$$

und dieſes Integral läßt ſich für jede bejahte und verneinte beſtändige Größe a leicht beſtimmen.

119. §.

3. Zusatz. Ferner setze man $V=X=0$; so erhält man aus (116.§.) $d^2u+Ududv=0$, $du=pdv$, $dp=-Updv$, daher $\frac{dp}{p}=-Udv$: also Log. $p=C-\int Udv$, und nun, für die Grundzahl e der natürlichen Logarithmen, $p=e^{C-\int Udv}$. Demnach ist $du=(e^{C-\int Udv})dv$. Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form

$$d^2u+Ududv=0 \text{ ist daher}$$

$$u=\int dv\,.\,e^{C-\int Udv}+B,$$

es mag U eine beständige Größe, oder was immer für eine Function von v seyn.

120. §.

4. Zusatz. Wären $U=a$, $V=b$, $X=c$ beständige Größen in (116.§.), daher

I. $d^2u+adudv+bdu^2+cdv^2=0$.

II. $dp=-(ap+bp^2+c)dv$.

III. $du=pdv$.

So wäre $\int\frac{dp}{bp^2+ap+c}=C-v$.

Da nun dieses Integral sich wirklich nach der im zweyten Bande gegebenen Anleitung durch p bestimmen läßt; so ist einleuchtend, daß man für jede Differentio-Differentialgleichung (I) einen Ausdruck von p durch v, daher auch, wegen (III) der derselben Gleichung entsprechenden Function u von v, wenigstens durch eine hinreichende Näherung bestimmen kann.

121. §.

5. Zusatz. Für $b=0$ im (120. §.) wäre $\frac{dp}{ap+c}=-dv$, daher Log. $(ap+c)=C-av$; und nun, für die Grundzahl e der natürlichen Logarithmen, $ap+c=e^{C-av}$, folglich $p=\frac{e^{C-av}-c}{a}$, und (120. §.) $du=\left(\frac{e^{C-av}-c}{a}\right)dv$.

Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form:

$$d^2u+adudv+cdv^2=0$$ ist also

$$u=D-\frac{(acv+e^{C-av})}{a^2}.$$

122. §.

6. Zusatz. Man setze $c=0$ in (120. §.); so erhält man

$$C-v=\int\frac{dp}{bp^2+ap}=\frac{lp-l(a+bp)}{a};$$

also kann man annehmen, es sey

$$\text{Log.}\frac{p}{a+bp}=C-av.$$

Und nun für die Grundzahl e der natürlichen Logarithmen,

$$\frac{p}{a+bp}=e^{C-av}, \text{ welches giebt}$$

$$p=\frac{ae^{C-av}}{1-be^{C-av}}. \text{ Daher ist (120. §.)}$$

$$du=\frac{dv.ae^{C-av}}{1-be^{C-av}}.$$

Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form:

$$d^2u+adudv+bdu^2=o \text{ iſt alſo}$$

$$u=\int\frac{dv.ae^{C-av}}{1-be^{C-av}}+B.$$

123. §.

Aufgabe. Die Größen U, V, X ſind von der veränderlichen Größe v unabhängig, übrigens, alle oder einige, entweder beſtändige Größen, oder was immer für Functionen von der veränderlichen Größe u: man ſoll v durch u aus der Differentio-Differentialgleichung $d^2u+Ududv+Vdu^2+Xdv^2=o$ beſtimmen.

Auflöſung. 1. Im (116. §.) hatten wir $du=pdv$, und $o=dp+(Up+Vp^2+X)dv$.

2. Daſelbſt iſt zwar u als eine Function von v betrachtet worden: wenn doch v nun diejenige Function von u bedeutet, welche aus jener durch Umkehrung entſtehen würde; ſo kann man nach (75. §.) in (1.) auch $dv=\frac{du}{p}$ ſetzen.

3. Aus (1) 2) hat man nun folgende Differentialgleichung zwiſchen p, u, dp, du.

$$pdp+(Up+Vp^2+X)du=o.$$

4. Dieſe Gleichung (3), weil U, V, X von keiner andern veränderlichen Größe, als von u, abhängen können, läßt ſich nun, wenigſtens durch Näherung, nach (113. 114. §.) integriren, wodurch eine Gleichung zwiſchen p und u entſtehen würde: daraus ließe ſich demnach ein Ausdruck

für

für p durch u herleiten, und wenn man hernach denselben in (2) nähme: so könnte man nach der bekannten Theorie nun auch v durch u bestimmen.

124. §.

1. Zusatz. Für V=X=o in (123. §.) wäre $dp=-Udu$ $p=C-\int Udu$; daher $dv=\frac{du}{C-\int Udu}$. Bey jeder Differentio-Differentialgleichung von der Form:

$$d^2u+Ududv=o \text{ ist also}$$

$$v=\int\frac{du}{C-\int Udu}+B,$$

es mag U eine beständige Größe, oder was immer für eine Function von u seyn.

125. §.

2. Zusatz. Setzt man aber U=X=o in (123. §.); so erhält man $\frac{dp}{p}=-Vdu$; Log. $p=C-\int vdu$, und nun $p=e^{C-\int Vdu}$; daher $dv=\frac{du}{e^{C-\int Vdu}}$. Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form:

$$d^2u+Vdu^2=o \text{ ist also}$$

$$v=\int\frac{du}{C-\int Vdu}+B,$$

es mag V eine beständige Größe, oder irgend eine Function von u seyn.

126. §.

3. Zusatz. Ist ferner U=V=o in (123. §.); so ist $pdp=-Xdu$, $\frac{p^2}{2}=C-\int Xdu$, $p=\sqrt{(C-2\int Xdu)}$,

eine Function von der andern v kann betrachtet werden (82. §.): wenn man demnach indeſſen einen unbeſtimmten Exponenten a nimmt, $u = Av^a + Bv^{a+1} + Cv^{a+2} + Dv^{a+3}$ + etc., daher $du = (aAv^{a-1} + (a+1)Bv^a + (a+2)Cv^{a+1} + (a+3)Dv^{a+2}$ + etc.) dv, hernach dieſe Werthe ſtatt u und du in $Mdu + Ndv = o$ ſetzt; ſo erhält man dadurch eine Gleichung, aus welcher, ſobald man a wird gehörig beſtimmt haben, ſich die Coefficienten A, B, C, D, etc. werden herleiten laſſen. So kann man ſich alſo der Function u von v nähern, welche dem unbekannten Integral von $Mdu + Ndv = o$ entſprechen ſoll (112. 113. §.)

Z. B. Sey $du + udv - \alpha v^n dv = o$.

Für $u = Av^a + Bv^{a+1} + Cv^{a+2}$ + etc., erhält man aus der gegebenen Gleichung;

$$\left.\begin{array}{llll} aAv^{a-1} + (a+1)Bv^a + (a+2)Cv^{a+1} + (a+3)Dv^{a+2} + \text{etc.} \\ -\alpha v^n \quad + Av^a \quad + Bv^{a+1} \quad + Cv^{a+2} + \text{etc.} \end{array}\right\} = o.$$

Daher nehme man $a - 1 = n$, und $a = n + 1$; ſo wird man haben:

$$\left.\begin{array}{llll} (n+1)Av^n + (n+2)Bv^{n+1} + (n+3)Cv^{n+2} + \text{etc.} \\ -\alpha v^n \quad + Av^{n+1} \quad + Bv^{n+2} + \text{etc.} \end{array}\right\} = o.$$

Hieraus findet man die Werthe von A, B, C, etc. für welche, und $a = n + 1$, entſtehet endlich:

$$u = \frac{\alpha v^{n+1}}{n+1} - \frac{\alpha v^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{\alpha v^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{\alpha v^{n+4}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \text{etc.} + \text{Conſt.}$$

115. §.

115. §.

3. Zusatz. Will man das Integral einer Differentio-Differentialgleichung $^{uv}d^2y = 0$ suchen: so sehe man, ob es nicht möglich ist das Integral $\int {}^{uv}d^2y$ nach (105 — 109. §.) zu bestimmen, woraus das Integral $\int {}^{uv}d^2y = 0$ der gegebenen Gleichung $^{uv}d^2y = 0$ entstehen würde. (112. §.). Oder man versuche, ob es nicht möglich ist, durch gewisse Kunstgriffe, wie z. B. die in (108. §.) erklärten sind, der gegebenen Differentio-Differentialgleichung $^{uv}d^2y = 0$ die Form einer Differentialgleichung $dZ = 0$ zu geben: kann dieses geschehen, so wird man daraus $Z = 0$ zum Integral nach (113. 114. §.) suchen können, und weil $Z = 0$ eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung ist, so wird man auch diese nach (113. 114. §.) integriren können. In dem bestimmten Fall, wenn bey einer Differentio-Differentialgleichung $^{uv}d^2y = 0$ der Exponent dv des ersten Differentialverhältnisses von einer veränderlichen Größe v unveränderlich, mithin $d^2v = 0$ ist, muß die andere veränderliche Größe u eine Function von v seyn (114. §.), und diese Function, so wie auch die Function v von u, welche aus jener durch Umkehrung entstehen würde (II. Band. 10. §.), läßt sich aus der gegebenen Gleichung $^{uv}d^2y = 0$ nach einer besondern Methode herleiten, welche, ob sie gleich nicht allgemein ist, in manchen Fällen ihre Anwendung findet: wir wollen daher die merkwürdigsten darunter bezeichnen.

116. §.

Aufgabe. Die Größen U, V, X sind unabhängig von der veränderlichen Größe u, übrigens beständige

dige Größen, oder was immer für Functionen von der veränderlichen Größe v, und zwar alle, oder einige: man soll die Function u von v suchen, für welche die Differentio-Differentialgleichung $d^2u + Ududv + Vdu^2 + Xdv^2 = o$ Statt haben soll.

Auflösung. 1. Weil u eine Function von v ist, so setze man wegen (58. 79. 80. §.)

$$du = pdv,\ dp = qdv,\ d^2u = qdv^2.$$

2. Für diese Werthe von du und d^2u übergeht die gegebene Gleichung in

$$qdv^2 + Updv^2 + Vp^2dv^2 + Xdv^2 = o;$$

also ist

$$q + Up + Vp^2 + X = o,$$

$$q = -(Up + Vp^2 + X).$$

3. Aus (1) 2) erhält man $o = dp + (Up + Vp^2 + X)dv$. Diese Gleichung enthält, vermöge der Voraussetzung, nur die veränderliche v bey U, V, X, p: sie soll sich daher nach der bekannten Theorie (113. 114. §.), wenigstens durch Näherung, integriren lassen. Fände man nun wirklich das Integral davon; so gäbe dieses p durch v, und wenn man hierauf denselben Ausdruck von p durch v in (1) nähme; so würde man auch $du = pdv$ nach der gemeinen Theorie integriren, und eben dadurch auch die verlangte Function u von v bestimmen können.

117. §.

1. Zusatz. Ist $U = V = o$ in (116. §.), so hat man daselbst $dp = -Xdv$: also $p = C - \int Xdv$; und nun $du = Cdv - dv\int Xdv$. Bey jeder Differentio-Differentialgleichung von der Form

d^2u

$d^2u+Xdv^2=o$ iſt alſo

$$u=Cv-\int dv\int Xdv+B$$

für jede beſtändige Größe X, und jede Function X von v.

118. §.

2. Zuſatz. Setzt man $U=X=o$ in (116. §.); ſo findet man daſelbſt $d^2u+Vdu^2=o$, $du=pdv$, $dp=-Vp^2dv$: alſo iſt $\frac{dp}{p^2}=-Vdv$, mithin $p=\frac{1}{\int Vdv+C}$, und nun $du=\frac{dv}{\int Vdv+C}$. Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form

$$d^2u+Vdu^2=o \text{ iſt}$$

$$u=\int\frac{dv}{\int Vdv+C}+B,$$

es mag V eine beſtändige Größe, oder was immer für eine Function von v ſeyn.

Z. B. Für eine unveränderliche Größe $V=a$ wäre

$$d^2u+adu^2=o,$$

$$u=\int\frac{dv}{\int adv+C}+B=\int\frac{dv}{av+C}+B:$$

alſo $u=\frac{1}{a}\text{Log.}(av+C)+B$.

Für $V=av$ hätte man

$$d^2u+avdu^2=o,$$

$$u=\int\frac{dv}{\frac{a}{2}v^2+C}+B,$$

und dieſes Integral läßt ſich für jede bejahte und verneinte beſtändige Größe a leicht beſtimmen.

119. §.

3. Zusatz. Ferner setze man $V=X=0$; so erhält man aus (116. §.) $d^2u+Ududv=0$, $du=pdv$, $dp=-Updv$, daher $\frac{dp}{p}=-Udv$: also Log. $p=C-\int Udv$, und nun, für die Grundzahl e der natürlichen Logarithmen, $p=e^{C-\int Udv}$. Demnach ist $du=(e^{C-\int Udv})dv$. Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form

$$d^2u+Ududv=0 \text{ ist daher}$$

$$u=\int dv\,.\,e^{C-\int Udv}+B,$$

es mag U eine beständige Größe, oder was immer für eine Function von v seyn.

120. §.

4. Zusatz. Wären $U=a$, $V=b$, $X=c$ beständige Größen in (116. §.), daher

I. $d^2u+adudv+bdu^2+cdv^2=0$.

II. $dp=-(ap+bp^2+c)dv$.

III. $du=pdv$.

So wäre $\int\frac{dp}{bp^2+ap+c}=C-v$.

Da nun dieses Integral sich wirklich nach der im zweyten Bande gegebenen Anleitung durch p bestimmen läßt; so ist einleuchtend, daß man für jede Differentio-Differentialgleichung (I) einen Ausdruck von p durch v, daher auch, wegen (III) der derselben Gleichung entsprechenden Function u von v, wenigstens durch eine hinreichende Näherung bestimmen kann.

121. §.

5. Zuſatz. Für b=o im (120. §.) wäre $\frac{dp}{ap+c} = -dv$, daher Log. $(ap+c) = C-av$; und nun, für die Grundzahl e der natürlichen Logarithmen, $ap+c = e^{C-av}$, folglich $p = \frac{e^{C-av}-c}{a}$, und (120. §.) $du = \left(\frac{e^{C-av}-c}{a}\right)dv$.

Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form:

$d^2u+adudv+cdv^2 = o$ iſt alſo

$$u = D - \frac{(acv+e^{C-av})}{a^2}.$$

122. §.

6. Zuſatz. Man ſetze c=o in (120. §.); ſo erhält man

$$C-v = \int \frac{dp}{bp^2+ap} = \frac{lp-l(a+bp)}{a},$$

alſo kann man annehmen, es ſey

$$\text{Log.}\ \frac{p}{a+bp} = C-av.$$

Und nun für die Grundzahl e der natürlichen Logarithmen,

$\frac{p}{a+bp} = e^{C-av}$, welches giebt

$p = \frac{ae^{C-av}}{1-be^{C-av}}$. Daher iſt (120. §.)

$du = \frac{dv \cdot ae^{C-av}}{1-be^{C-av}}$.

Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form:

$$d^2u+adudv+bdu^2=0 \text{ ist also}$$

$$u=\int\frac{dv.ae^{C-av}}{1-be^{C-av}}+B.$$

123. §.

Aufgabe. Die Größen U, V, X sind von der veränderlichen Größe v unabhängig, übrigens, alle oder einige, entweder beständige Größen, oder was immer für Functionen von der veränderlichen Größe u: man soll v durch u aus der Differentio-Differentialgleichung $d^2u+Ududv+Vdu^2+Xdv^2=0$ bestimmen.

Auflösung. 1. Im (116. §.) hatten wir $du=pdv$, und $0=dp+(Up+Vp^2+X)dv$.

2. Daselbst ist zwar u als eine Function von v betrachtet worden: wenn doch v nun diejenige Function von u bedeutet, welche aus jener durch Umkehrung entstehen würde; so kann man nach (75. §.) in (1.) auch $dv=\frac{du}{p}$ setzen.

3. Aus (1) 2) hat man nun folgende Differentialgleichung zwischen p, u, dp, du.

$$pdp+(Up+Vp^2+X)du=0.$$

4. Diese Gleichung (3), weil U, V, X von keiner andern veränderlichen Größe, als von u, abhängen können, läßt sich nun, wenigstens durch Näherung, nach (113. 114. §.) integriren, wodurch eine Gleichung zwischen p und u entstehen würde: daraus ließe sich demnach ein Ausdruck

für

für p durch u herleiten, und wenn man hernach denselben in (2) nähme: so könnte man nach der bekannten Theorie nun auch v durch u bestimmen.

124. §.

1. Zusatz. Für V=X=o in (123. §.) wäre $dp=-Udu$ $p=C-\int Udu$; daher $dv=\frac{du}{C-\int Udu}$. Bey jeder Differentio-Differentialgleichung von der Form:

$$d^2u+Ududv=o \text{ ist also}$$

$$v=\int\frac{du}{C-\int Udu}+B,$$

es mag U eine beständige Größe, oder was immer für eine Function von u seyn.

125. §.

2. Zusatz. Setzt man aber U=X=o in (123. §.); so erhält man $\frac{dp}{p}=-Vdu$; Log. $p=C-\int vdu$, und nun $p=e^{C-\int Vdu}$; daher $dv=\frac{du}{e^{C-\int Vdu}}$. Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form:

$$d^2u+Vdu^2=o \text{ ist also}$$

$$v=\int\frac{du}{C-\int Vdu}+B,$$

es mag V eine beständige Größe, oder irgend eine Function von u seyn.

126. §.

3. Zusatz. Ist ferner U=V=o in (123. §.); so ist $pdp=-Xdu$, $\frac{p^2}{2}=C-\int Xdu$, $p=\sqrt{(C-2\int Xdu)}$,

wegen der unbestimmten Constante; daher $dv = \frac{du}{\sqrt{(C-2\int X du)}}$.

Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form:

$$d^2u + Xdv^2 = 0$$ ist also

$$v = \int \frac{du}{\sqrt{(C-2\int X du)}} + B,$$

es mag X eine beständige Größe, oder was immer für eine Function von u seyn.

127. §.

4. Zusatz. Seyen $U = a$, $V = b$, $X = c$ beständige Größen; so ist in (123. §.)

$$\text{I.}\quad dv = \frac{du}{p}.$$

$$\text{II.}\quad \frac{pdp}{bp^2 + ap + c} = -du.$$

Nun kann man (II) nach der im zweyten Bande gegebenen Anleitung vollständig integriren: aus dem bestimmten Integral kann man hernach einen Ausdruck für p durch u herleiten: setzt man denselben Ausdruck in (I), so wird man nach der bekannten Theorie auch v durch u bestimmen. Auf diese Art läßt sich also aus jeder Differentio-Differentialgleichung

$$d^2u + adudv + bdu^2 + cdv^2 = 0$$

eine Gleichung zwischen u und v finden.

128. §.

5. Zusatz. In dem besondern Fall, wenn $c = 0$ in (127. §.) wäre, fände man $p = \frac{e^{C-bu} - a}{b}$; also

$v =$

$$v = \int \frac{bdu}{e^{C-bu} - a}$$

für $d^2u + adudv + bdu^2 = o$.

129. §.

6. Zuſatz. Und wenn $a = o$ in (127. §.) wäre; ſo erhielte man $p = \frac{\sqrt{(e^{C-2bu} - c)}}{\sqrt{b}}$: alſo allemahl

$$v = \int \frac{du\sqrt{b}}{\sqrt{(e^{C-2bu} - c)}}$$

für $d^2u + bdu^2 + cdv^2 = o$.

130. §.

Aus (116 — 129. §.) erhellet demnach, daß es keine Differentio-Differentialgleichung von der Form $Pd^2u + Qdudv + Rdu^2 + Sdv^2 = o$ geben kann, die ſich nach der bereits bekannten Theorie nicht integriren ließe, ſobald alle Größen P, Q, R, S dergeſtalt beſchaffen ſind, daß für ſie, wenn man die ganze Gleichung durch P dividirt, ſie daher in $d^2u + \frac{Q}{P}dudv + \frac{R}{P}du^2 + \frac{S}{P}dv^2 = o$ verwandelt, gewiſſe entweder von u, oder von v ganz unabhängige Größen $\frac{Q}{P}$, $\frac{R}{P}$, $\frac{S}{P}$ entſtehen müſſen.

Der III. Abschnitt.

Von den Grundformuln, worauf die Anwendung der Differentialverhältnisse auf die höhere Geometrie und Mechanik beruhet.

131. §.

Erklärung.

1. Fig. Sey OMS eine krumme Linie; UV die Abscissenlinie; C der Anfangspunkt der Abscissen; CP eine Abscisse, und MP die damit unter was immer für einem Coordinatenwinkel MPC verbundene Ordinate. Die gerade Linie Bp berühre die krumme Linie OS in M, und schneide zugleich die Abscissenlinie UV in B; eine andere MN sey in M auf Bp senkrecht, und schneide die Abscissenlinie UV in N. Endlich schneide die gerade Linie Rm die krumme Linie OS in den Punkten M, m, und die Abscissenlinie UV in R. Nun heißt MB die dem Punkte M zugehörige Tangente, BP Subtangente, MN Normallinie, PN Subnormallinie, und MR Secante, RP aber die Subsecante.

132. §.

1. Zusatz. Wenn man die rechtwinklichte Ordinate MP = y (II. Band. 87. §.) als eine Function von der Abscisse CP = x als einer absoluten veränderlichen Größe betrachtet (40. §.), welche, wenn CP = x um PQ = Δx wächst, in mQ = y^1 übergehen, und um $y^1 - y = mQ - MP = mq = \Delta y$ zunehmen mag, hernach durch M, m die Secante RM ziehet (131. §.); so ist mq : Mq = MP : RP, oder Δy : Δx = y : RP, nämlich: das Verhältniß

der

der Differenz der Ordinate gegen die Differenz der Abscisse ist dem Verhältnisse der Ordinate gegen die mit der Differenz der Abscisse verbundene Subsecante gleich.

133. §.

2. Zusatz. Wenn $\Delta x = PQ$ beständig abnimmt (47. §.) so nähert sich die Subsecante RP der Subtangente BP (131. §.) als ihrer Gränze (48. §.), daher nähert sich dabey das Verhältniß $y : RP$ dem Verhältnisse $y : BP$ als seiner Gränze (88. §. Anm. VI.): das Verhältniß $y : BP$ der Ordinate gegen die Subtangente ist also das Differentialverhältniß der Ordinate y als einer Function von der Abscisse x, und sein Exponent $dy = \frac{y}{BP}$ (132. 52. §.), statt dessen man $dy = \frac{y\,dx}{BP}$ setzen kann (55. §.).

134. §.

Aufgabe. Die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $y = MP$, $x = CP$ einer krummen Linie OMS ist gegeben, man soll die ihnen zugehörige Subtangente, Subnormallinie, Tangente, Normallinie, und die Lage der Tangente und Normallinie gegen die Ordinate und Abscissenlinie bestimmen.

Auflösung. Die Subtangente folgt in I) aus (133. §.), und durch sie findet man die Subnormallinie $PN = \frac{MP^2}{BP}$ in II), nebst der Tangente $MB = \sqrt{(MP^2 + BP^2)}$ in III); aus II) aber ergiebt sich die Normallinie $MN = \sqrt{(PM^2 + PN^2)}$ in IV). Die Lage der Tangente gegen

die Ordinate, und der Normallinie gegen die Abscissenlinie hänge vom Winkel BMP = MNP ab, wofür ist Tang. BMP = Tang. MNP = $\frac{BP}{MP}$, welches aus I) wie in V) bestimmt wird. Die Lage endlich der Tangente gegen die Abscissenlinie, und der Normallinie gegen die Ordinate hänge vom Winkel MBP = PMN ab, wofür ist Tang. MBP = Tang. PMN = $\frac{MP}{BP}$, welches ebenfalls aus I) wie in VI) gefunden wird.

I. $BP = \frac{ydx}{dy}$.

II. $PN = \frac{ydy}{dx}$.

III. $MB = \frac{y\sqrt{(dy^2+dx^2)}}{dy}$.

IV. $MN = \frac{y\sqrt{(dy^2+dx^2)}}{dx}$.

V. Tang. BMP = Tang. MNP = $\frac{dx}{dy}$.

VI. Tang. MBP = Tang. NMP = $\frac{dy}{dx}$.

Beyspiele an Kegelschnitten, welche ich im zweyten Bande (104. 105. 106. §.) angeführt habe, sind hinreichend, den Gebrauch dieser Formuln zu erläutern. In (132. §.), worauf doch alles beruhet, haben wir zwar vorausgesetzt, daß die krumme Linie von der Beschaffenheit ist, daß ihre Ordinate y zunehmen muß, wenn die Abscisse x zunimmt: es ist aber für sich klar genug, daß die

dortigen Schlüsse auch für den Fall gelten, wenn die Ordinate, bey zunehmender Abscisse, abnimmt, nur muß man in solchen Fällen dy mit entgegengesetzten Zeichen nehmen.

135. §.

Erklärung. Ein Kreisbogen Mb berührt von innen eine krumme Linie MO im Punkte M, wenn er ganz innerhalb der krummen Linie MO liegt, wie immer er auch und die krumme Linie selbst nach der Gegend O verlängert wird. Hingegen wird die krumme Linie MO von einem Kreisbogen Mk im Punkte M von außen berührt, wenn er ganz außerhalb der krummen Linie MO liegt. 2. Fig.

136. §.

1. Zusatz. Wenn irgend ein, etwa aus dem Puncte c der geraden Linie MV mit dem Halbmesser cM beschriebener, Kreis Mb, oder Mk die krumme Linie MO von innen oder außen berührt; so giebt es unzählbare Kreise, welche die krumme Linie MO von innen, oder außen berühren können, gewiß alle, welche aus den innerhalb des Halbmessers cM im ersten Fall, oder außerhalb desselben liegenden Mittelpuncten im zweyten Fall sich beschreiben lassen (135. §.).

137. §.

2. Zusatz. Ist TS eine gemeinschaftliche Tangente der krummen Linie MO und eines sie von innen oder außen in M berührenden Kreises Mb oder Mk (135. 136. §.); so ist die an M nächste Ablenkung der krummen Linie MO von der Tangente MS größer, als die an M nächste Ablenkung des Kreisbogens Mk, und kleiner als die an M nächste Ablenkung

lenkung des Kreisbogens Mb von derselben Tangente MS; die krumme Linie MO krümmet sich im Punkte M stärker, als der Kreisbogen Mk, und schwächet, als der Kreisbogen Mb; der Unterschied aber zwischen den an M nächsten Ablenkungen der krummen Linie MO und des sie in M berührenden Kreisbogens Mk oder Mb von der gemeinschaftlichen Tangente MS, daher auch der Unterschied der Krümmungen der krummen Linie MO, und des sie in M berührenden Kreisbogens Mk oder Mb ist im Punkte M um so kleiner, je näher der Kreisbogen Mk oder Mb an MO liegt.

138. §.

3. Zusatz. Stellt man sich unter allen Kreisen, welche eine krumme Linie MO im Punkte M von innen oder außen berühren mögen (136. §.), einen vor, der so nahe an der krummen Linie MO liegen mag, daß zwischen ihm und der krummen Linie MO kein anderer Kreisbogen liegen kann, der diese an demselben Punkte berührte, und sonst nirgends zwischen M und O schnitte; so ist seine an M nächste Ablenkung von der Tangente MS mit der an M nächsten Ablenkung der krummen Linie MO von der Tangente MS gleich groß; jener Kreis krümmt sich im Punkte M eben so stark, als die krumme Linie MO (137. §.); aus diesem Grunde wird ein solcher Kreis der dem Puncte M der krummen Linie MO zugehörige **Krümmungskreis**, und sein Halbmesser der **Krümmungshalbmesser** genannt.

Man lese Karstens Lehrbegriff der gesammten Mathematik. 2ten Theils 2te Abtheil. IV. Abschnitt; und mathematische Abhandlungen. 5te Abhandlung.

139. §.

139. §.

4. Zusatz. Unter allen eine krumme Linie MO von innen im Puncte M berührenden Kreisen der größte, oder unter allen sie in M von außen berührenden Kreisen der kleinste ist der dem Puncte M zugehörige Krümmungskreis (136. 138. §.). Auf diesem Grunde beruht die Methode, nach welcher der Krümmungskreis für irgend eine Stelle M einer krummen Linie MO kann aufgesucht werden.

140. §.

Wenn die gerade Linie MV zur Abscissenlinie genommen wird, und die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $Mp=x$, $mp=y$ einer krummen Linie MO bekannt ist; so kann man ganz unabhängig von der Differentialrechnung entscheiden, ob es für die Stelle M einen Krümmungskreis, dessen Mittelpunct irgendwo in c liegen mag, wirklich giebt, und wie groß sein Halbmesser Mc ist. Ich will dieses durch ein Beyspiel erläutern, und dabey einige wesentliche, die Natur des Krümmungskreises betreffende, Umstände näher erwägen.

I. Die Gleichung für die krumme Linie MO zwischen ihren rechtwinklichten Coordinaten $Mp=x$, $mp=y$ sey $y^2=Ax\pm Bx^2$, so daß hier auch $B=0$, aber nicht $B>1$ seyn kann.

II. Die Gleichung für jeden Kreis, wenn sein Halbmesser r heißt, ist $y^2=2rx-x^2$.

III. Giebt es nun einen mit irgend einem Halbmesser $r=Mc$ zu beschreibenden Kreisbogen Mb, welcher die krumme

krumme Linie MO in M von jenen berühren würde; so muß ihm für jede Abscisse Mp eine kleinere Ordinate np als der krummen Linie MO zugehören; sein Halbmesser Mc = r muß daher so groß seyn, daß dafür auch $np^2 < mp^2$ werde: also nach I) II).

$$2rx - x^2 < Ax \pm Bx^2,$$

und $r < \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(1 \pm B)x$.

IV. Vermöge der Voraussetzung (I) ist B gewiß nicht größer als 1: also ist $\frac{1}{2}(1 \pm B)x$ allemal bejaht. Jeder Kreis also, den man mit einem Halbmesser $r = \frac{1}{2}A$, oder, $r < \frac{1}{2}A$ beschriebe, würde die krumme Linie MO in M berühren (III), und unter allen wäre der Kreis Mb für den Halbmesser $Mc = r = \frac{1}{2}A$ der größte (III), mithin der Krümmungskreis (139. §.)

V. Der mit dem Halbmesser $Mc = r = \frac{1}{2}A$ beschriebene Kreis Mb würde nämlich so nahe an der krummen Linie MO liegen, daß zwischen ihm und dieser Linie kein anderer Kreis Me liegen könnte, der die krumme Linie in M berührte, und nirgends zwischen M und O schnitte (138. §.).

Denn ein solcher Kreis müßte doch einen größeren Halbmesser $Md = Mc + cd = \frac{1}{2}A + cd$ haben, wie immer auch der Unterschied cd klein seyn möchte. Nun aber wäre eine Abscisse $Mp = x = \frac{2cd}{1 \pm B}$, und eine andere $Mq = x < \frac{2cd}{1 \pm B}$ möglich.

Für $x = \frac{2cd}{1 \pm B}$ wäre auch

$x \pm Bx = 2cd$, und $\pm Bx = 2cd - x$:

also $\sqrt{(Ax \pm Bx^2)} = \sqrt{(2(\frac{1}{2}A + cd)x - x^2)}$.

Für

Für $x < \frac{2cδ}{1 \pm B}$ wäre auch

$x \pm Bx < 2cδ$, und $\pm Bx < 2cδ - x$:

also $\sqrt{(Ax \pm Bx^2)} < \sqrt{(2(\frac{1}{2}A + cδ)x - x^2)}$.

Das heißt, wegen (I) (II), im ersten Fall würde die Ordinate des Kreises Me so groß als die Ordinate der krummen Linie MO, im zweyten Fall aber würde sie größer als diese seyn: der Kreis Me würde also die krumme Linie MO im Puncte m schneiden, an welchem sie von ihrer der Abscisse $Mp = \frac{2cδ}{1 \pm B}$ zugehörigen Ordinate mp geschnitten wird.

VI. Für die gemeine Parabel MO und ihre Axe MV ist $B = 0$, und A der Parameter in (I) nach (II. Band. 95. §.): der dem Scheitel A zugehörige Krümmungshalbmesser ist also $MC = \frac{1}{2}A$ (IV) dem halben Parameter gleich.

Wenn aber die krumme Linie MO ein elliptischer oder hyperbolischer Bogen ist, und MV seine Axe; so ist nach (II. Band. 96. 97. §.) $A = \frac{b^2}{a^2}$, $B = \frac{b^2}{a}$ in (I): der dem Scheitel M der Ellipse und Hyperbel zugehörige Krümmungshalbmesser ist also $Mc = \frac{1}{2}A = \frac{b^2}{2a}$ (IV) $= \frac{1}{2}p$ (II. Band. 99. §.), daher ebenfalls dem halben Parameter gleich.

VII. Jeder Abscisse $Mp = x$ gehört beym Krümmungskreise Mb (IV) eine Ordinate np zu, deren Quadrat ist nach (II) $np^2 = 2(\frac{1}{2}A)x - x^2 = Ax - x^2$.

Der-

VIII. Derſelben Abſciſſe $Mp=x$ gehört bey der krummen Linie MO die Ordinate mp ſo genommen, daß ihr Quadrat $mp^2 = Ax \pm Bx^2$ iſt (1).

IX. Die Differenz der Quadrate (VII) VIII) iſt alſo allemal $mp^2 - np^2 = (1 \pm B)x^2$ etwas bejahtes, weil, vermöge der Vorausſetzung, B nicht größer als 1 iſt: jeder Abſciſſe $Mp=x$, ſie mag wie immer klein genommen werden, wenn ſie nur noch ein Stück von MV, und kein Punkt iſt, gehören beym Krümmungskreiſe Mb und bey der krummen Linie MO verſchiedene Ordinaten np, mp zu.

X. Demnach iſt nicht geſtattet ſich vom Krümmungskreiſe Mb die Vorſtellung zu machen, daß er ein an M ſo nahe liegender Kreis iſt, daß ein Theilchen von ihm mit einem von der krummen Linie MO an M zuſammenfällt, es mag ein ſolches Theilchen wie immer klein angenommen werden (IX): nichts macht Mb zum Krümmungskreiſe, als die in (IV) V) bewieſene Eigenſchaft, welche beſtehet, wenn es gleich keine Theilchen von Mb und MO giebt, die an M zuſammen fielen.

141. §.

3. Fig. **Aufgabe.** Die Gleichung zwiſchen den rechtwinklichten Coordinaten $CP=x$, $MP=y$ einer krummen Linie OMS iſt gegeben; man ſoll den Krümmungshalbmeſſer für die Stelle M finden.

Auflöſung. 1. Die gerade Linie $B\beta$ berühre die krumme Linie OMS in M; ſo kann man den Winkel $BMP=\varphi$ und die Ordinate $MP=y$ als zwo Functionen von der Abſciſſe $CP=x$ als einer abſoluten veränderlichen Größe betrachten.

2. Stellt

2. Stellt man sich nun vor, die Abscisse $CP=x$ wachse um eine Differenz $Pp=\Delta x$; so übergehet dafür die Ordinate $MP=y$ in eine Ordinate $mp=y'$, und wenn by die krumme Linie OMS in m berührt; so ist $bmp=\phi'$ der Winkel, in welchen der Winkel $BMP=\phi$ bey derselben Voraussetzung übergeht. Zieht man demnach Mq zu Pp, und mk zu MB parallel; so ist $mq=mp-MP=y'-y=\Delta y$, und $bmk=bmp-kmp=bmp-BMP=\phi'-\phi=\Delta\phi$.

3. Die an M und m Normallinien seyen MN, mn; so sind βMN, bmn rechte Winkel (131. §.): wird also die Sehne Mm gezogen; so sind bmM, βMm, und Mmn, mMN spitzige Winkel. Daher müssen die Tangenten βM, bm einander irgendwo in s, und die Normallinien Mn, mn irgendwo in R schneiden, dergestalt, daß der Winkel $MRm=90°-kmR$ (im rechtwinklichten Dreyecke kmR) $=90°-(bmR-bmk)=90°-90°+bmk$; mithin $MRm=bmk=\Delta\phi$ ist (2).

4. Man nehme nun an, daß es für die Stelle M der krummen Linie OMS wirklich einen Krümmungskreis Mx giebt, welcher aus einem gewissen Punkte c der Normallinie MN mit dem Halbmesser cM beschrieben die krumme Linie OMS in M so nahe berührt, von innen oder von außen, daß zwischen ihm und derselben krummen Linie kein Kreis liegen kann, der sie in M berührte, und nirgends zwischen M und S schnitte (138. §.); so muß er mit der krummen Linie OMS am Punkte M die gemeinschaftliche Tangente $B\beta$ haben, und die andere Normallinie mR irgend wo in u

schneiden, dergestalt, daß seine Tangente in u von der Tangente by der krummen Linie OMS in m unterschieden ist: wenn man sich also vorstellt, daß $\Delta x = Pp$ allmählich abnimmt, mithin der Punkt m immer näher gegen M rückt; so müssen auch die Punkte m, u immer näher gegen einander und den Punkt M rücken, die Tangente des Krümmungskreises Mz an u, und die der krummen Linie OMS an m, nähern sich der Tangente an M, und der Unterschied der Entfernungen MR, mR des Punkts R von M und m von der Normallinie $uc = Mc$ des Krümmungskreises Mz wird immer kleiner, so daß jene sich dem Halbmesser Mc des Krümmungskreises Mc als ihrer Gränze nähern. Will man demnach entscheiden, ob es für die Stelle M wirklich einen Krümmungskreis Mz giebt; so muß man untersuchen ob die Entfernungen MR, mr sich, wenn Δx beständig abnimmt, einer bestimmten von Δx unabhängigen gemeinschaftlichen Gränze nähern, welche den Halbmesser Mc des Krümmungskreises Mz abgeben soll.

5. Im Dreyecke MRm hat man allemal

$$mR : Mm = \text{Sin } mMR : \text{Sin } MRm;$$
$$MR : Mm = \text{Sin } MmR : \text{Sin } MRm:$$

also $$mR = \frac{Mm \cdot \text{Sin } mMR}{\text{Sin } \Delta\varphi} \text{ nach (3)}$$

$$MR = \frac{Mm \cdot \text{Sin } MmR}{\text{Sin } \Delta\varphi}.$$

6. Nun ist $mMR = 90° - Mmk = 90° - (Mmq - kmp)$, daher $mMR = 90° - (Mmq - \varphi)$ wegen (2): also ist $\text{Sin } mMR = \text{Cos } (Mmq - \varphi)$.

7. Fer-

7. Ferner ist $MmR = 180° - (mMR + mRM)$: wegen (3) 6) ist also $MmR = 90° - (\varphi + \Delta\varphi - Mmq)$, daher $\text{Sin}\, MmR = \text{Cos}(\varphi + \Delta\varphi - Mmq)$.

8. Demnach findet man nach (I. Band. 156. §.) in (6) 7)

$$\text{Sin}\, mMR = \text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,Mmq + \text{Sin}\,\varphi\,\text{Sin}\,Mmq$$
$$\text{Sin}\, MmR = \text{Cos}(\varphi+\Delta\varphi)\,\text{Cos}\,Mmq + \text{Sin}(\varphi+\Delta\varphi)\,\text{Sin}\,Mmq.$$

9. Ferner ist im rechtwinklichten Dreyecke Mqm allemal

$$\text{Sin}\, Mmq = \frac{Mq}{Mm} = \frac{\Delta x}{Mm};$$

$$\text{Cos}\, Mmq = \frac{mq}{Mm} = \frac{\Delta y}{Mm}.$$

10. Aus (5) 8) 9) erhält man demnach folgende Ausdrücke für mR und MR,

$$mR = \frac{\Delta y\,\text{Cos}\,\varphi + \Delta x\,\text{Sin}\,\varphi}{\text{Sin}\,\Delta\varphi},$$

$$MR = \frac{\Delta y\,\text{Cos}(\varphi+\Delta\varphi) + \Delta x\,\text{Sin}(\varphi+\Delta\varphi)}{\text{Sin}\,\Delta\varphi}.$$

Daher nach (28. §.)

$$mR = \frac{\Delta y\,\text{Cos}\,\varphi + \Delta x\,\text{Sin}\,\varphi}{\Delta\varphi - \frac{\Delta\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\Delta\varphi^5}{1\ldots5} - \frac{\Delta\varphi^7}{1\ldots7} + \text{etc.}}$$

$$MR = \frac{\Delta y\,\text{Cos}(\varphi+\Delta\varphi) + \Delta x\,\text{Sin}(\varphi+\Delta\varphi)}{\Delta\varphi - \frac{\Delta\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\Delta\varphi^5}{1\ldots5} - \frac{\Delta\varphi^7}{1\ldots7} + \text{etc.}}$$

11. Nun kann man $\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{dx}\Delta x + \alpha\Delta x^2 + \beta\Delta x^3 +$ etc. für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten α, β, etc. setzen (59. §.): also müssen andere von Δx unabhängige Coefficienten e, f, g, etc. möglich seyn, wofür die Ausdrücke (10) sich in folgende würden verwandeln lassen.

$$mR = \frac{\Delta y \operatorname{Cof}\varphi + \Delta x \operatorname{Sin}\varphi}{\frac{d\varphi}{dx}\Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + \text{etc.}}$$

$$MR = \frac{\Delta y \operatorname{Cof}(\varphi+\Delta\varphi) + \Delta x \operatorname{Sin}(\varphi+\Delta\varphi)}{\frac{d\varphi}{dx}\Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + \text{etc.}}$$

12. Da aber $\operatorname{Cof}(\varphi+\Delta\varphi)$ und $\operatorname{Sin}(\varphi+\Delta\varphi)$ zween Reihen gleich sind, wovon die ersten Glieder $\operatorname{Cof}\varphi$ und $\operatorname{Sin}\varphi$, die übrigen Glieder aber die Producte aus den Potenzen $\Delta\varphi$, $\Delta\varphi^2$, $\Delta\varphi^3$, etc. in gewisse von $\Delta\varphi$ unabhängige Coefficienten seyn müssen (II. Band. 67. §.); so müssen gewisse von $\Delta\varphi$ unabhängige Coefficienten k, l, m, etc. p, q, r, etc. möglich seyn, wofür ist in (11)

$$MR = \frac{\Delta y \operatorname{Cof}\varphi + \Delta y(p\Delta\varphi + q\Delta\varphi^2 + r\Delta\varphi^3 + \text{etc.}) + \Delta x \operatorname{Sin}\varphi + \Delta x(k\Delta\varphi + l\Delta\varphi^2 + m\Delta\varphi^3 + \text{etc.})}{\frac{d\varphi}{dx}\Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + \text{etc.}}$$

13. Man kann aber auch $\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \alpha\Delta x^2 + \beta\Delta x^3 +$ etc. für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten α, β, etc. setzen, wie $\Delta\varphi$ in (11): es müssen also gewisse von Δx unabhängige Coefficienten K, L, M, ... K^1, L^1, M^1, möglich seyn, für welche die Ausdrücke mR, MR in (11) 12) sich in folgende verwandeln ließen.

mR

$$mR = \frac{\left(\frac{dy\,\mathrm{Cof}\varphi}{dx} + \mathrm{Sin}\,\varphi\right)\Delta x + K\Delta x^2 + L\Delta x^3 + \text{etc.}}{\frac{d\varphi}{dx}\Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + \text{etc.}}$$

$$MR = \frac{\left(\frac{dy\,\mathrm{Cof}\varphi}{dx} + \mathrm{Sin}\,\varphi\right)\Delta x + K'\Delta x^2 + L'\Delta x^3 + \text{etc.}}{\frac{d\varphi}{dx}\Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + \text{etc.}}$$

Und hieraus erhellet endlich, daß es allemal gewisse von Δx ganz unabhängige Coefficienten $A, B, C, \ldots A', B', C'$, etc. geben muß, für welche ist:

$$mR = \frac{dy\,\mathrm{Cof}\varphi + dx\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{d\varphi} + A\Delta x + B\Delta x^2 + \text{etc.}$$

$$MR = \frac{dy\,\mathrm{Cof}\varphi + dx\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{d\varphi} + A'\Delta x + B\Delta x^2 + \text{etc.}$$

Demnach ist gewiß, daß, wenn $\Delta x = Pp$ abnimmt, mR und MR sich dem von Δx unabhängigen Quotienten $\frac{dy\,\mathrm{Cof}\varphi + dx\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{d\varphi}$ als ihrer Gränze nähern (49. §.): dieser Quotient soll daher der dem Puncte M zugehörige Krümmungshalbmesser seyn (4), nämlich, wenn man ihn r nennt:

$$r = \frac{dy\,\mathrm{Cof}\varphi + dx\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{d\varphi}.$$

14. Es war aber $\mathrm{Tang}\,\varphi = \frac{dx}{dy}$ (134. §.); also ist nach (I. Band. 154. §.).

$$\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{dx}{\sqrt{(dy^2 + dx^2)}};\quad \mathrm{Cof}\varphi = \frac{dy}{\sqrt{(dy^2 + dx^2)}};$$

und $d\varphi = d.\frac{\frac{dx}{dy}}{1+\frac{dx^2}{dy^2}}$ (II. Band. 22. §. 9. Zuſ.),

mithin $d\varphi = \frac{dyd^2x - dxd^2y}{dy^2+dx^2)}$.

Für dieſe Werthe von Sin φ, Coſ φ, $d\varphi$ erhält man daher aus (13) den Krümmungshalbmeſſer

$$r = \frac{(dy^2+dx^2)(dy^2+dx^2)}{(dyd^2x - dxd^2y)\sqrt{(dy^2+dx^2)}},$$

oder $r = \frac{(dy^2+dx^2)^{\frac{3}{2}}}{dyd^2x - dxd^2y}$.

15. Aber gewöhnlichſt wird die Abſciſſe x als eine abſolute veränderliche Größe, und y als eine Function von ihr betrachtet, wie dieſes wirklich in (1) geſchah: bey dieſer Vorausſetzung iſt $dx = 1$, und $d^2x = d.dx = 0$ (55. 53. §.). Demnach der Krümmungshalbmeſſer (14)

$$r = \frac{(dy^2+dx^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxd^2y} = \frac{(dy^2+1)^{\frac{3}{2}}}{-d^2y}.$$

16. Wollte man die Ordinate y als eine abſolute veränderliche Größe, und die Abſciſſe x als eine Function von ihr betrachten (40. §.), ſo wäre $dy = 1$, und $d^2y = d.dy = 0$ (55. 53. §.): alſo der Krümmungshalbmeſſer (14)

$$r = \frac{(dy^2+dx^2)^{\frac{3}{2}}}{dyd^2x} = \frac{(1+dx^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2x}.$$

17. Die Formul (16. §.) folgt aus (14) wegen (75. §.), ob gleich wir in (1) x als eine abſolute veränderliche Größe, und y

als

als eine Function von ihr betrachtet haben, worauf die Erfindung der Formul (14) beruhete, die aber bey dieſer Vorausſetzung in (15) übergehet.

142. §.

1. Zuſatz. Iſt OMS die Parabel, und ZX ihre Axe; ſo iſt $y=\sqrt{px}$ (II. Band. 95. §.); alſo

$$dy=\frac{p^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}};\ d^2y=-\frac{p^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}}.$$

Der Krümmungshalbmeſſer für jede Stelle M der Parabel iſt demnach (141. §. n. 15.)

$$r=\left(\frac{p}{4x}+1\right)^{\frac{3}{2}}:\frac{p^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}}=\frac{(p+4x)^{\frac{3}{2}}}{2p^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man $x=PC=PT=0$; ſo iſt $r=\frac{p^{\frac{1}{2}}}{2p^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}p$ der Krümmungshalbmeſſer für den Scheitel T, wie in (140. §. n. VI.).

143. §.

2. Zuſatz. Iſt hingegen OMS die Ellipſe oder Hyperbel; ſo iſt nach (II. Band. 99 §. Zuſatz.)

$$y=\sqrt{\left(px\mp\frac{px^2}{a}\right)}:\text{ alſo}$$

$$dy=\frac{ap\mp 2px}{2a\sqrt{\left(px\mp\frac{px^2}{a}\right)}};\ dy^2=\frac{a^2p^2\mp 4ap^2x+4p^2x^2}{4a^2\left(px\mp\frac{px^2}{a}\right)};$$

$$\text{und } d^2y=\frac{-p^2}{4\left(px\mp\frac{px^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Das obere Zeichen (—) gilt für die Ellipse, und das untere für die Hyperbel: für beyde ist also der Krümmungshalbmesser nach (141. §. n. 15.)

$$r=\left(\frac{a^2p^2\mp 4ap^2x+4p^2x^2}{4a^2\left(px\mp\frac{px^2}{a}\right)}+1\right)^{\frac{3}{2}}:\frac{p^3}{4\left(px\mp\frac{px^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\text{daher } r=\frac{1}{2p^2}\left(p^2+\frac{4p}{a}\left(\frac{p}{a}\mp 1\right)x^2+4p\left(1\mp\frac{p}{a}\right)x\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Setzt man $x=PC=PT=0$; so findet man $r=\frac{1}{2}p$ zum Krümmungshalbmesser für den Scheitel T der Ellipse und Hyperbel, wie in (140. §. n. VI.).

Aus diesen Beyspielen läßt sich leicht abnehmen, worauf alles bey der Anwendung der allgemeinen Formeln (141. §.) auf andere krumme Linien ankömmt.

144. §.

1. Fig. **Aufgabe.** Die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $CP=x$, $MP=y$ einer krummen Linie OMS ist gegeben; man soll den Bogen $AM=\mu$ finden, folglich die krumme Linie OMS rectificiren.

Auflösung. 1. Man betrachte den Bogen $AM=\mu$ und die Ordinate $MP=y$ als zwo Functionen von der Abscisse $CP=x$ als einer absoluten veränderlichen Größe (40. §.), welche, wenn $CP=x$ um die Differenz $Pp=\Delta x$ zunimmt, in $\mu'=Am$ und $y'=mQ$ übergehn, mithin um $\mu'-\mu=Mm=\Delta\mu$ und $y'-y=mq=\Delta y$ sich ändern mögen, wobey Mq zu UV parallel ist.

2. Wird

2. Wird nun an M die Tangente BM gezogen, welche von Qm in p mag geschnitten werden; so wird der Bogen $\Delta\mu = Mm$ allemal größer seyn, als seine Sehne $= \sqrt{(Mq^2+mq^2)}$, und zugleich allemal kleiner als $Mp+pm$, wie immer auch $PQ = \Delta x$ abnehmen mag (47. §.); für jede wie immer kleine Differenz Δx ist also:

$$\Delta\mu > \sqrt{(mq^2+Mq^2)}, \text{ und } \Delta\mu < Mp+pm.$$

3. Nun war $mq = \Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \alpha\Delta x^2 + \beta\Delta x^3 + \text{etc.}$ in der Bedeutung (59. §.), und $Mq = \Delta x'$: es müssen also andere von Δx unabhängige Coefficienten k, l, m, etc. möglich seyn, wofür wäre $mq^2 = \Delta y^2 = \frac{dy^2}{dx^2}\Delta x^2 + k\Delta x^3 + l\Delta x^4 + \text{etc.}$ und $mq^2+Mq^2 = \Delta y^2 + \Delta x^2 = \left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)\Delta x^2 + k\Delta x^3 + l\Delta x^4 + \text{etc.}$ Demnach muß es auch solche von Δx unabhängige Coefficienten P, Q, R, etc. geben, wofür wäre: $\sqrt{(mq^2+Mq^2)} = \sqrt{(\Delta y^2+\Delta x^2)} = \left(\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)\Delta x^2 + k\Delta x^3 + l\Delta x^4 + \text{etc.}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)^{\frac{1}{2}}\Delta x + P\Delta x^2 + Q\Delta x^3 + R\Delta x^4 + \text{etc.}$

4. Ferner ist $Mp : Mq = BM : BP$, daher

$$Mp = \frac{MB \cdot Mq}{BP} = \frac{\Delta x\sqrt{(dy^2+dx^2)}}{dx}$$

$$= \Delta x\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)} \text{ nach (134. §.).}$$

5. Und es iſt $pq : Mq = MP : BP$, daher

$$pq = \frac{MP \cdot Mq}{BP} = \frac{dy}{dx}\Delta x \text{ (134. §.)};$$

alſo wegen (3) iſt

$$pm = pq + mq = \frac{dy}{dx}\Delta x + \Delta y = -\alpha\Delta x^2 - \beta\Delta x^3 - \text{etc.}$$

6. Aus (2) (3) 4) 5) erhält man für jede wie immer kleine Differenz Δx.

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} > \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)} + P\Delta x + Q\Delta x^2 + \text{etc.}$$

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} < \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)} - \alpha\Delta x - \beta\Delta x^2 - \text{etc.}$$

Der Exponent des Differentialverhältniſſes des Bogens $\mu = AM$ als einer Function von der Abſciſſe x iſt alſo nach (69. §.)

$$d\mu = dx\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)} = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}.$$

Einige Anwendungen hievon findet man im zweyten Buche (112. 114. 125. §. 1. Zuſ.).

145. §.

1. Zuſatz. Die dem Puncte M einer krummen Linie OMS zugehörige Tangente MB, und Normallinie MN hängen dergeſtalt mit dem Bogen $\mu = AM$ zuſammen, daß, wenn man mit T die Tangente, und mit N die Normallinie zeichnet, nach (144. 134. §.) allemal iſt

$$d\mu$$

$$d\mu = \frac{Tdy}{y} = \frac{Ndx}{y};$$

$$T = \frac{yd\mu}{dy}; \quad N = \frac{yd\mu}{dx}.$$

146. §.

1. Zusatz. Für den Exponenten $d\mu$ des Differentialverhältnisses des Bogens $\mu = AM$ als einer Function von der Abscisse x ist der dem Puncte M zugehörige Krümmungshalbmesser nach (144. 141. §. n. 14.)

$$r = \frac{d\mu^3}{dyd^2x - dxd^2y} = \frac{N^3dx^3}{y^3(dyd^2x - dxd^2y)} \quad (145. §.).$$

Da aber gewöhnlich, wie auch hier ist vorausgesetzt worden, x als eine absolute veränderliche Größe betrachtet wird, wofür $dx = 1$, $d^2x = 0$ seyn muß; so ist in diesem Fall:

$$r = \frac{d\mu^3}{-dxd^2y} = \frac{N^3dx^3}{-y^3dxd^2y},$$

$$\text{oder } r = -\frac{d\mu^3}{d^2y} = -\frac{N^2}{y^3d^2y}.$$

Werden aber der Bogen μ und die Abscisse x als zwei Functionen von der Ordinate y als einer absoluten veränderlichen Größe betrachtet; so ist nun $dy = 1$, $d^2y = 0$, daher

$$r = \frac{d\mu^3}{dyd^2x} = \frac{N^3dx^3}{y^3dyd^2x},$$

$$\text{oder } r = \frac{d\mu^3}{d^2x} = \frac{N^3dx^3}{y^3d^2x}.$$

147. §.

147. §.

1. Aufgabe. Die Gleichung zwiſchen den rechtwinklichten Coordinaten $CP = x$, $MP = y$ einer krummen Linie OMS iſt gegeben; man ſoll den Flächen-Raum $ACPM = R$ finden.

Fig. 1.

Auflöſung. Die Ordinate $y = MP$, und den Raum $R = ACPM$ kann man als zwey Functionen von der Abſciſſe $AP = x$ als einer abſoluten veränderlichen Größe anſehen (40. §.), welche, wenn $CP = x$ um eine Differenz $PQ = \Delta x$ wächſt, in $y' = mQ$, und $ACQm = R'$ übergehen, mithin ſich um $mQ - MP = y' - y = mq = \Delta y$, und $ACQm - ACPM = R' - R = MPQm = \Delta R$ ändern mögen. Nun aber iſt, wenn man PM in r verlängert, und mr parallel zu Uv zieht, allemal

$$MPQm > MPQq \text{ und } MPQm < rPQm;$$

alſo für jede wie immer kleine Differenz Δx

$$\Delta R > y\Delta x \text{ und } \Delta R < (y + \Delta y)\Delta x.$$

Da es aber von Δx unabhängige Coefficienten α, β, γ, u. ſ. f. geben ſoll, für welche iſt $\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \alpha\Delta x^2 + \beta\Delta x^3 + \gamma\Delta x^4 + \text{etc.}$ (59. §.); ſo iſt auch allemal

$$\frac{\Delta R}{\Delta x} > y \text{ und } \frac{\Delta R}{\Delta x} < y + \frac{dy}{dx}\Delta x + \alpha\Delta x^2 + \text{etc.}$$

Der Exponent des Differentialverhältniſſes des Flächenraums $ACPM = R$ als einer Function von x muß alſo ſeyn nach (69. §.) $dR = ydx$.

Beyſpiele, welche den Gebrauch dieſer Formul erläutern ſollen, ſehe man im zweyten Bande (116. §. 1. 2. — 14. Zuſ.)

148. §.

149. §.

Aufgabe. Die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $Aa=x$, $Pa=y$ einer krummen Linie BPC ist gegeben; man soll den körperlichen Inhalt des runden Körpers PBp finden, welcher durch die Umdrehung der Linie BP um die Abscissenlinie BE entstehen mag. 4. Fig.

Auflösung. 1. Man betrachte die Ordinate $Pa=y$ und den Körper $PBp=K$ als zwo Functionen von der Abscisse $Aa=x$ als einer absoluten veränderlichen Größe, welche, wenn $Aa=x$ um $ab=\Delta x$ wächst, in $rb=y'$ und $rBs=K'$ übergehen, mithin um $rR=\Delta y$ und $Ppsr=\Delta K$ zunehmen mögen, vorausgesetzt, daß rb zu Pa, und PR zu BE parallel ist, Pp, rs aber zweene kreisförmige, auf BE parallele Ebenen sind, welche durch die Umdrehung der Ordinaten Pa, rb, als ihrer Halbmesser, um BE erzeugt werden.

2. Da nun, wie jeder Theil eines Ganzen kleiner als das Ganze selbst, und jedes Ganze größer als ein Theil davon ist, auch Ppsr kleiner seyn muß, als der Cylinder, der den Kreis rs zur Grundfläche und ab zur Höhe hat, und Ppsr größer als der Cylinder, dessen Grundfläche der Kreis Pp, die Höhe aber ab ist; so hat man für jede wie immer kleine Differenz $ab=\Delta x$.

$$Ppsr > Pp.ab \text{ und } Ppsr < rs.ab;$$

daher auch

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} > Pp \text{ und } \frac{\Delta K}{\Delta x} < rs.$$

3. Das

3. Das Verhältniß des Halbmeſſers zur halben Peripherie ſey $1 : \pi$; ſo iſt $y\pi$ die halbe Peripherie des Kreiſes Pp, und ſein Flächeninhalt iſt $Pp = \pi y^2$: ferner iſt $(y+\Delta y)\pi$ die halbe Peripherie des Kreiſes rs, und ſein Flächeninhalt $rs = \pi(y+\Delta y)^2$. Demnach iſt auch

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} > \pi y^2; \quad \frac{\Delta K}{\Delta x} < \pi(y+\Delta y)^2.$$

4. Da man aber $\Delta y = \alpha\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \text{etc.}$ für gewiſſe von Δx unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. ſetzen kann (59. §.); ſo müſſen andere von Δx unabhängige Coefficienten k, l, m, etc. möglich ſeyn, für welche iſt $(y+\Delta y)^2 = y^2 + k\Delta x + l\Delta x^2 + m\Delta x^3 + \text{etc.}$ alſo:

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} > \pi y^2; \quad \frac{\Delta K}{\Delta x} < \pi y^2 + \pi(k\Delta x + l\Delta x^2 + \text{etc.})$$

5. Der Exponent des Differentialverhältniſſes von $K = PBp$ als einer Function von x iſt daher nach (69. §.) $dK = \pi y^2 = \pi y^2 dx$.

Einige Beyſpiele, den Gebrauch dieſer Formul betreffend, findet man im zweyten Bande (117. §. 1. 2 — 9. Zuſ.).

149. §.

Aufgabe. Die Gleichung zwiſchen den rechtwinklichten Coordinaten $\alpha a = x$, $Pa = y$ einer krummen Linie BC iſt gegeben; man ſoll die runde Oberfläche des Körpers PBp finden, welcher durch die Umdrehung des Dreyecks BPa um Ba entſtehen würde.

Auflösung. 1. Die runde Oberfläche von PBp sey S; so sind S und y=Pa zwo Functionen von der Abscisse aa=x als einer absoluten veränderlichen Größe.

2. Sey an P die Tangente AF gezogen, und die Abscisse aa=x wachse um ab=Δx; so übergeht dafür die Ordinate Pa=y in rb=y', und der Bogen BP=μ übergeht in Br=μ', die runde Oberfläche S von PBp übergehet in die runde Oberfläche S' von rBs, welche durch die Umdrehung des Bogens Br um Bb entstehen würde: die Ordinate wächst daher um Δy=rR, der Bogen BP um Δμ=Pr, und die runde Oberfläche S um die runde Oberfläche ΔS von Prsp.

3. Zieht man die Sehnen Por, pos; so kann man sich einen abgestutzten Kegel Porsop zwischen den Kreisen Pp, rs denken, dessen runde Oberfläche kleiner ist, als die runde Oberfläche ΔS des Körpers Prsp, welche der Bogen Pr während der Umdrehung um ab erzeugt.

4. Und wenn die Ordinate br verlängert die Tangente in Q trifft; so erzeugt PQ während der Umdrehung um ab die runde Oberfläche des abgestutzten Kegels PQqp, und Qr erzeugt einen kreisförmigen Ring, dessen beyde Halbmesser rb und Qb sind: die runde Oberfläche ΔS des vom Bogen Pr erzeugten Körpers Ppsr ist aber kleiner als die Summe der runden Oberfläche des abgestutzten Kegels PQqp, und der Fläche des von Qr erzeugten Ringes.

5. Die runde Oberfläche des abgestutzten Kegels Porsop, welche die Sehne Por erzeugen soll (3) ist nun $\pi(2y+\Delta y)$Por für das Verhältniß 1 : π des Halbmessers zur halben Peripherie, oder $\pi(2y+\Delta y)\sqrt{(\Delta y^2+\Delta x^2)}$.

6. Die

6. Die runde Oberfläche des abgestutzten Kegels PQqp, welche PQ erzeugt (4) ist $\pi(2y+\Delta y+rQ)PQ$; und die Fläche des von Qr erzeugten Ringes (4) ist $\pi(2y+2\Delta y+Qr)Qr$.

7. Aus (3) 4) 5) 6) erhält man demnach für jede wie immer kleine Differenz Δx

$$\Delta S > \pi(2y+\Delta y)\sqrt{(\Delta y^2+\Delta x^2)}.$$

$$\Delta S < \pi(2y+\Delta y+rQ)PQ+\pi(2y+2\Delta y+Qr)Qr.$$

8. Nun ist, wie Mp und pm in (144. §. n. 4. 5.),

$$PQ = \Delta x\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}, \text{ und } Qr = -\alpha\Delta x^2 - p\Delta x^3 - \text{etc.};$$

ferner $\sqrt{(\Delta y^2+\Delta x^2)} = \Delta x\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}+P\Delta x^2+Q\Delta x^3+\text{etc.}$

wie in (144. §. n. 3.), für $\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x+\alpha\Delta x^2+\beta\Delta x^3+\text{etc.}$

9. Aus (8) 7) erhellet demnach, daß gewisse von Δx unabhängige Coefficienten K, L, M, ... k, l, m, etc. möglich seyn müssen, für welche ist:

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} > 2\pi y\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}+k\Delta x+l\Delta x^2+\text{etc.}$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} < 2\pi y\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}+K\Delta x+L\Delta x^2+\text{etc.}$$

Der Exponent des Differentialverhältnisses der runden Oberfläche $S = PBp$ als einer Function von der Abscisse $aa = x$ ist daher nach (69. §.)

$$dS = 2\pi y dx\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)} = 2\pi y\sqrt{(dy^2+dx^2)}.$$

Der-

Beyſpiele, welche den Gebrauch dieſer Formul erläutern, ſehe man im zweyten Bande (120. §. 1. 2 — 11. Zuſatz).

150. §.

Zuſatz. Die Quadratur der runden Oberfläche $S = PBp$ iſt mit der Rectification des Bogens $BP = \mu$ dergeſtalt verbunden, daß $dS = 2\pi y d\mu$ ſeyn muß (149. 144. §.).

151. §.

Aufgabe. Wenn man was immer für eine, auf rechtwinklichte Coordinaten $CP = x$, $MP = y$ eingeſchränkte Formul hat, welche außer x, y, auch dx, dy enthalten mag, dieſelbe in eine gleichgültige für die ſchiefwinklichten Coordinaten $CT = u$, $MT = z$ zu verwandeln, wenn der Coordinatenwinkel $MTC = \varphi$ gegeben iſt. 1. Fig.

Auflöſung. Die Gleichung zwiſchen den rechtwinklichten Coordinaten $x = CP$, $y = MP$ einer krummen Linie OMS übergehet in die Gleichung zwiſchen ihren ſchiefwinklichten Coordinaten $CT = u$, $MT = z$ für jeden Coordinaten-Winkel $MTC = \varphi$, wenn man bey ihr nach (II. Band. 93. §.)

$$y = z \operatorname{Sin}\varphi; \quad x = u - z \operatorname{Cos}\varphi$$

ſetzt: wenn man alſo irgend eine Formul hat, worinn die rechtwinklichten Coordinaten x, y vorkommen; ſo wird man jene Werthe bey ihr ſtatt y, x nehmen müſſen, um ſie in eine gleichgültige zu verwandeln.

Es kann aber die gegebene Formul auch dx, dy enthalten; und statt dieser Exponenten wird man folgende nehmen müssen.

$$dy = dz \operatorname{Sin}\varphi; \; dx = du - dz \operatorname{Cos}\varphi.$$

152. §.

1. Zusatz. Die Tangente MB, Normallinie MN, und die Lage beyder Linien gegen die Abscissenlinie UV bleibt dieselbe, man mag sie mit den rechtwinklichten Coordinaten CP = x, MP = y, oder mit den schiefwinklichten CT = u, MT = z vergleichen: man findet sie also unmittelbar aus (134. 151. §.), nämlich:

$$BM = \frac{z}{dz}\sqrt{(dz^2 + du^2 - 2dzdu\operatorname{Cos}\varphi)}.$$

$$MN = \frac{z \operatorname{Sin}\varphi \sqrt{(dz^2 + du^2 - 2dzdu\operatorname{Cos}\varphi}}{du - dz\operatorname{Cos}\varphi}.$$

$$\operatorname{Tang} MBT = \frac{dz \operatorname{Sin}\varphi}{du - dz\operatorname{Cos}\varphi}.$$

$$\operatorname{Tang} MNT = \frac{du - dz\operatorname{Cos}\varphi}{dz \operatorname{Sin}\varphi}.$$

153. §.

2. Zusatz. Aber die der schiefwinklichten Ordinate MT = z zugehörige Subtangente ist BT = BP + PT = BP + z Cos φ, und die Subnormallinie TN = PN − z Cos φ: wenn man also BP, BN nach (134. 151. §.) suchet; so findet man:

$$BT = \frac{zdu}{dz}.$$

$$TN = \frac{z(dz - du\operatorname{Cos}\varphi)}{du - dz\operatorname{Cos}\varphi}.$$

154. §.

154. §.

3. Zusatz. Für die Lage der Tangente MB und Normallinie MN gegen die schiefwinklichte Ordinate MT = z wäre nach (I. Band. 155. §. 4. Zusatz) Tang. BMT $= \frac{BT \operatorname{Sin} \varphi}{z - BT \operatorname{Cos} \varphi}$, und Tang. TMN = Cot. BMT $= \frac{1}{\text{Tang. BMT}}$: also nach (153. §.)

$$\text{Tang. BMT} = \frac{du \operatorname{Sin} \varphi}{dz - du \operatorname{Cos} \varphi}.$$

$$\text{Tang. NMT} = \frac{dz - du \operatorname{Cos} \varphi}{du \operatorname{Sin} \varphi}.$$

155. §.

4. Zusatz. Der Bogen AM = μ, mit den schiefwinklichten Coordinaten CT = u, MT = z verglichen, giebt nach (144. 151. §.)

$$d\mu = \sqrt{(dz^2 + du^2 - 2dzdu \operatorname{Cos} \varphi)}.$$

156. §.

5. Zusatz. Beym unmittelbaren Gebrauch der vorhergehenden Formuln (152. 153. 154. 155. §.) wird demnach vorausgesetzt, daß die Gleichung zwischen den schiefwinklichten Coordinaten CT = u, MT = z einer krummen Linie OMS bekannt ist.

157. §.

Aufgabe. Eine auf die rechtwinklichten Coor- 5. Fig.
dinaten CP = x, MP = y eingeschränkte Formul in eine gleichgültige zu verwandeln, worinn statt jener

Coordinaten die aus einem bestimmten Puncte X der Abscissenlinie UV ausgehenden Ordinaten $MX = z$, und der veränderliche Winkel $MXC = \varphi$, vorkommen sollen.

Auflösung. 1. Vermöge der Voraussetzung liegt der Punct X in einer bestimmten Entfernung $CX = a$ vom Anfangspuncte C der Abscissen $CP = X$.

2. Setzt man $PX = u$; so ist $x = a - u$, und $y = z \operatorname{Sin} \varphi$: da also $u = z \operatorname{Cos} \varphi$ seyn muß; so hat man:

$$y = z \operatorname{Sin} \varphi;\ x = a - z \operatorname{Cos} \varphi.$$

Für diese Werthe von y und x wird demnach die gegebene Formul in gleichgültige verwandelt werden, die nun, statt x, y, den Winkel φ und die Ordinate z enthalten wird.

3. Wenn aber die zu verwandelnde Formul auch dx, dy enthält; so muß man dafür folgende mit (2) verbundene Werthe nehmen.

$$dy = zd \operatorname{Sin} \varphi + dz \operatorname{Sin} \varphi;$$
$$dx = -zd \operatorname{Cos} \varphi - dz \operatorname{Cos} \varphi:$$

also nach (77. §.)

$$dy = zd\varphi \operatorname{Cos} \varphi + dz \operatorname{Sin} \varphi.$$
$$dx = zd\varphi \operatorname{Sin} \varphi - dz \operatorname{Cos} \varphi.$$

158. §.

1. Zusatz. Für den Bogen $AM = \mu$, die Tangente MB, Normallinie MN, und die Lage dieser beyden Linien gegen die Abscissenlinie UV erhält man nach (134. 144. 157. §.)

$$d\mu = \sqrt{(dz^2 + z^2 d\varphi^2)}$$

$$MB = \frac{z\sqrt{(dz^2+z^2d\varphi^2)}}{zd\varphi \operatorname{Cot}\varphi + dz}.$$

$$MN = \frac{z\sqrt{(dz^2+z^2d\varphi^2)}}{zd\varphi - dz \operatorname{Cot}.\varphi}.$$

$$\operatorname{Tang}.MBX = \frac{zd\varphi + dz \operatorname{Tang}.\varphi}{zd\varphi \operatorname{Tang}\varphi - dz}.$$

$$\operatorname{Tang}.MNB = \frac{zd\varphi \operatorname{Tang}\varphi - dz}{zd\varphi + dz \operatorname{Tang}\varphi}.$$

159. §.

2. Zusatz. Die Lage der Tangente MB gegen die Ordinate MX = z zu finden, nehme man Tang XMP $= \frac{PX}{MP} = \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi}$ (157. §.); und Tang BMP $= \frac{dx}{dy}$ (134. §.): also Tang BMX $= \left(\frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi} + \frac{dx}{dy}\right) : \left(1 - \frac{dx \operatorname{Cos}\varphi}{dy \operatorname{Sin}\varphi}\right)$ nach (II. Band. 156. §. 1. Zus. XV. Form.). Demnach nach (157. §.)

$$\operatorname{Tang} BMX = \frac{zd\varphi}{dz}.$$

160. §.

3. Zusatz. Für die Lage der Normallinie NM gegen die Ordinate MX = z hat man Tang NMX = Tang (PMX — PMN); daher, wegen Tang PMX = Cot PXM $= \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi}$, und Tang PMN $= \frac{dy}{dx}$ (134. §.), ist nach (I. Band. 156. §. 1. Zus. XV. Form.)

$$\text{Tang NMX} = \frac{dx \operatorname{Cof}\varphi - dy \operatorname{Sin}\varphi}{dx \operatorname{Sin}\varphi + dy \operatorname{Cof}\varphi}.$$

Alſo iſt nach (157. §.)

$$\text{Tang NMX} = -\frac{dz}{zd\varphi}.$$

161. §.

4. Zuſatz. Bey ſolchen Ordinaten MX = z muß man an X eine ſenkrechte Linie nb auf MX ſetzen, welche die Tangente BM in b, und die Normallinie MN in n ſchneiden mag, wenn man die Subtangente, und Subnormallinie haben will, wie ſie hier gewöhnlich betrachtet wird: es iſt nämlich Xb die Subtangente, und Xn die Subnormallinie. Weil alſo $Xb = MX \cdot \text{Tang b MX} = z\,\text{Tang BMX}$, und $Xn = MX \cdot \text{Tang NMX}$ iſt; ſo erhält man die Subtangente, und Subnormallinie nach (159. 160. §.), wie folgt.

$$Xb = \frac{z^2 d\varphi}{dz}; \quad Xn = -\frac{dz}{d\varphi}.$$

162. §.

Nun wollen wir auch diejenigen Grundformuln aufſuchen, auf welchen alle Anwendungen der Differentialverhältniſſe auf die höhere Mechanik beruhen. Bey den vorhergehenden Unterſuchungen habe ich nichts vorausgeſetzt, was nicht entweder in dieſer Beylage, oder in dem Unterrichte, zu welchem ſie gehört, iſt bewieſen worden. Hingegen ſetze ich nun voraus, daß die Lehre vom Gleichgewichte der Kräfte am Hebel, vom Schwerpuncte, und von der Zuſammenſetzung der Kräfte meinen Leſern bekannt iſt. Von

der

der Bewegung selbst werde ich nichts annehmen, ohne es zu beweisen: ich will mich vielmehr bemühen, alles, was wirklich brauchbar, allgemein, und vorzüglich bey einer vollkommenen Abhandlung der Maschinenlehre unentbehrlich ist, zwar kurz, doch deutlich und gründlich auseinander zu setzen.

163. §.

Erklärung. Ein Körper bewegt sich, oder ruhet, nachdem er seinen Ort ändert, oder nicht. Es hängt aber die Bewegung jedes Körpers von den Bewegungen aller Puncte, die bey ihm gedacht werden können, dergestalt ab, daß, um jene gehörig zu bestimmen, man im Stande seyn muß, diese einzelnen Bewegungen zu beurtheilen. Aus dieser Ursache, und weil bisweilen, wie wir sehen werden, die Bewegung eines einzigen Puncts zur Bestimmung der Bewegung des ganzen Körpers hinreicht, pflegt man die Lehre von der Bewegung einzelner Punkte der von der Bewegung der Körper zum Grunde zu legen.

164. §.

Erklärung. Die Bewegung eines Puncts ist aber geradlinicht oder krummlinicht, nachdem er sich in einer geraden oder krummen Linie fortbewegt. Bey geradlinichter Bewegung wird ihre Richtung durch die gerade Linie selbst bestimmt, in welcher der Punct fortgeht: bey der krummlinichten Bewegung aber wird ihre Richtung alle Augenblicke geändert: in jedem Augenblicke kömmt sie mit der Tangente überein, welche demjenigen Puncte der krummen Linie zugehört, an dem sich der bewegliche Punct in demselben Augenblicke befindet.

165. §.

Erklärung. Bey der Beurtheilung der Bewegung eines Puncts kömmt alles darauf an, daß man die Dauerzeit, den Weg oder Raum, welchen der Punct binnen derselben Zeit zurücklegt, und die Geschwindigkeit zu bestimmen im Stande sey, mit welcher er sich in jedem Augenblicke bewegt. Ein Punct mag sich in einer geraden oder krummen Linie bewegen (164. §.); so wird er ein Stück davon in einer gewissen Zeit durchlaufen, und dasselbe giebt den eigentlichen Weg oder Raum, den er binnen derselben Zeit zurücklegt. Die Vergleichung des binnen einer Zeit zurückgelegten Raums mit derselben Zeit führt zum Begriffe der Geschwindigkeit: allen Puncten, welche gleiche Räume binnen gleichen Zeiten zurücklegen, werden gleiche Geschwindigkeiten zugeschrieben: wenn aber zween Puncte ungleiche Räume binnen gleichen Zeiten durchlaufen; so sagt man, ihre Geschwindigkeiten seyen ungleich, und die Geschwindigkeit desjenigen Punkts sey größer, welcher den größern Raum durchläuft. Eben so sagen wir von einem Puncte, er bewege sich mit einerley Geschwindigkeit fort, wenn er in gleichen auf einander folgenden Zeittheilchen gleiche Wege zurücklegt: wenn er aber in gleichen Zeiten ungleiche Räume durchläuft; so sagt man, er bewege sich mit ungleicher Geschwindigkeit, etwa mit wachsender oder abnehmender, nachdem die Räume, welche in den folgenden gleichen Zeittheilchen zurückgelegt werden, immer größer, oder kleiner als diejenigen sind, welche der Punct in den vorhergehenden Zeittheilchen zurücklegt.

166. §.

Erklärung. Die Bewegung eines Puncts heißt unveränderlich oder gleichförmig, wenn er in gleichen, wie immer großen oder kleinen, Zeiten gleiche Räume durchläuft, wenn er demnach mit einerley Geschwindigkeit fortgeht (165. §.): hingegen wird die Bewegung eines Puncts veränderlich genannt, wenn er ungleiche Räume in gleichen Zeiten durchläuft, mithin mit ungleicher Geschwindigkeit fortgeht (165. §.).

167. §.

1. Zusatz. Wenn bey einer unveränderlichen Bewegung binnen einer Zeit z der Raum r, und binnen einer andern mmal so großen Zeit Z ein Raum R zurückgelegt wird; so ist auch R mmal so groß als r, nämlich $R=rm$ wegen $Z=zm$ (166. §.).

168. §.

2. Zusatz. Ist aber bey einer unveränderlichen Bewegung die Dauerzeit $Z=z\frac{m}{n}$ aus m nteln der Zeit z zusammengesetzt; so muß auch der binnen der Zeit Z zurückgelegte Raum R aus m nteln des binnen der Zeit z zurückgelegten Raumes r zusammengesetzt, oder auch $R=r\frac{m}{n}$ seyn (166. §.).

169. §.

Lehrsatz. Bey jeder gleichförmigen Bewegung verhalten sich die binnen was immer für Zeiten T, t zurückgelegten Räume S, s gegen einander, wie die Zeiten selbst, oder es ist $S:s=T:t$.

Beweis.

Beweis. Die Zeiten T, t sind commensurabel, oder incommensurabel.

1. Wenn T, t commensurabele Zeiten sind; so müssen sie einen gemeinschaftlichen aliquoten Theil haben, dergestalt, daß, für gewisse ganze Zahlen m, n, entweder t ganz, oder ein ntel davon zugleich ein mtel von T ist: dafür muß also $T = t\,m$, oder $T = t\frac{m}{n}$ seyn. Daher auch, für dieselben Zahlen, $S = s\,m$, oder $S = s\frac{m}{n}$ (167. 168. §.); mithin $S : s = m : 1$, oder $S : s = \frac{m}{n} : 1$, so wie $T : t = m : 1$, oder $T : t = \frac{m}{n} : 1$. In beyden Fällen ist daher $S : s = T : t$.

2. Sind hingegen die Zeiten T, t incommensurabel; so giebt es keinen aliquoten Theil von t, welcher zugleich ein aliquoter Theil von T wäre, es muß vielmehr für jedes mögliche ntel von t eine ganze Zahl m möglich seyn, wofür

$$T > t\frac{m}{n} \text{ und zugleich } T < t\frac{m+1}{n}$$

seyn würde. Dafür muß aber auch der binnen der Zeit T zurückgelegte Weg S größer seyn, als der Weg $s\frac{m}{n}$, welchen der bewegliche Punct in der Zeit $t\frac{m}{n}$ zurücklegen würde, und zugleich kleiner als der Weg $s\frac{m+1}{n}$, den er in der Zeit $t\frac{m+1}{n}$ durchlaufen würde (166. 168. §.), nämlich auch

$$S > s\frac{m}{n} \text{ und zugleich } S < s\frac{m+1}{n}.$$

Daraus erhält man

$$Ts > tS\frac{m}{m+1} \text{ und } Ts < tS\frac{m+1}{m},$$

daher

$$Ts > tS - \frac{tS}{m+1} \text{ und } Ts < tS + \frac{tS}{m}.$$

Es ist aber

$$tS - \frac{tS}{m+1} > tS - \frac{tS}{m};$$

also ist auch

$$Ts > tS - \frac{tS}{m} \text{ und } Ts < tS + \frac{tS}{m}.$$

Dieses soll, vermöge des Vorhergehenden für jede wie immer große Zahl n, und damit auch für jede wie immer große Zahl m gelten: da also gewiß eine ganze Zahl m möglich ist, wofür ein mtel von tS, nämlich $\frac{tS}{m}$ kleiner seyn würde, als eine wie immer kleine denkbare gleichartige Größe; so ist gewiß $Ts = tS$ (8. §.), daher $S:s = T:t$.

170. §.

Zusatz. Wenn demnach irgend ein Raum s bekannt ist, welchen ein Punct, der sich gleichförmig fortbewegt, binnen einer bestimmten Zeit t durchlaufen mag; so kann man leicht den Raum S bestimmen, den er in jeder andern Zeit T durchlaufen würde, und eben dadurch erhält man einen bestimmten Begriff von seiner Geschwindigkeit (165. §.) Aus diesem Grunde pflegt man die unveränderliche Geschwin-

schwindigkeit bey der gleichförmigen Bewegung durch den Weg zu schätzen, welcher in einer Secunde zurückgelegt wird: wenn demnach C die Geschwindigkeit bedeutet, und S den binnen jeder andern Zeit T zurückgelegten Weg; so ist $S:C=T:1''$, daher $S=C.\frac{T}{1''}$, wobey $\frac{T}{1''}$ den Exponenten des Verhältnisses der Zeit T gegen eine Secunde ausdrückt. Man kann aber $1''$ weglassen, und denselben Exponenten sich bey T denken, wodurch man folgende Grundformuln zur Beurtheilung jeder gleichförmigen Bewegung erhält:

$$S=CT;\ C=\frac{S}{T};\ T=\frac{S}{C}.$$

171. §.

Lehrsatz. Bey jeder veränderlichen Bewegung kann man den binnen einer Zeit T zurückgelegten Weg S, und die Geschwindigkeit C, welche der bewegliche Punct am Ende der Zeit T haben mag, als zwo Functionen von T als einer absoluten veränderlichen Größe betrachten, wofür ist $dS=C=CdT$.

Beweis. Daß man die Dauerzeit T bey einer veränderlichen Bewegung als eine absolute veränderliche Größe betrachten kann, erhellet aus (40. §.): da aber der Raum S, welchen ein Punct binnen einer Zeit T zurücklegen, und die Geschwindigkeit C, die er am Ende derselben Zeit haben soll, von der Zeit T abhängt (166. §.); so erhellet daraus auch, daß sowohl S, als C als eine Function von T kann betrachtet werden.

1. Man

1. Man nehme demnach an, der Punct, welcher den Weg S binnen der Zeit T bereits zurückgelegt, und die Geschwindigkeit C erlangt hat, setze seine Bewegung um ein Zeittheilchen ΔT fort, dergestalt, daß nun $T+\Delta T$ die Dauerzeit seiner Bewegung sey; so muß er binnen der Zeit ΔT ein neues Stück ΔS seiner Bahn durchlaufen, so daß $S+\Delta S$ der gesammte, binnen der Zeit $T+\Delta T$ zurückgelegte Weg sey: seine am Ende der Zeit T erlangte Geschwindigkeit C wird sich in dem darauf folgenden Zeittheilchen ΔT um ein Stück ΔC ändern, etwa zu- oder abnehmen, dergestalt, daß der bewegliche Punct am Ende der Zeit $T+\Delta T$ eine Geschwindigkeit $C+\Delta C$ oder $C-\Delta C$ haben mag (166. §.).

2. Behielte der Punct in der ganzen Zeit ΔT die Geschwindigkeit C; so würde er binnen derselben Zeit den Raum $C\Delta T$ durchlaufen (166. 170. §.: da also seine Geschwindigkeit während der ganzen Zeit ΔT zu- oder abnimmt (1), da demnach derselbe Punct in der Zeit ΔT einen größeren oder kleineren Raum ΔS (1) zurücklegt, als er zurücklegen würde, wenn er mit unveränderter Geschwindigkeit C fortgienge (165. §.); so ist eigentlich:

$$\Delta S > C\Delta T \text{ oder } \Delta S < C\Delta T.$$

3. Hätte der bewegliche Punct die Geschwindigkeit $C+\Delta C$ oder $C-\Delta C$ binnen der ganzen Zeit ΔT; so müßte er binnen dieser Zeit den Weg $(C+\Delta C)\Delta T$, oder $(C-\Delta C)\Delta T$ zurücklegen (166. 170. §): da also seine am Ende der Zeit T erlangte Geschwindigkeit C in der darauf folgenden Zeit ΔT allmählich zu- oder abnahm, bis

sie

sie erst am Ende der Zeit ΔT in $C+\Delta C$ oder $C-\Delta C$ übergieng (1), da demnach der bewegliche Punct einen kleineren oder größeren Weg ΔS binnen der Zeit ΔT zurückgelegt hat, als er zurückgelegt hätte, wenn er in der ganzen Zeit ΔT die unveränderliche Geschwindigkeit $C+\Delta C$ oder $C-\Delta C$ gehabt hätte (165. §.); so ist eigentlich.

$$\Delta S < (C+\Delta C)\Delta T \text{ oder } \Delta S > (C-\Delta C)\Delta V.$$

4. Nun soll C eine Function von T seyn: die Differenz davon soll sich demnach, für gewisse von ΔT unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. durch $\Delta C = \alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \gamma\Delta T^3 + \text{etc.}$ ausdrücken lassen (59. §.). Für jedes wie immer kleines Zeittheilchen ΔT hat man also wegen (2) 3)

$$\frac{\Delta S}{\Delta T} > C \text{ und } \frac{\Delta S}{\Delta T} < C + \alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\Delta S}{\Delta T} < C \text{ und } \frac{\Delta S}{\Delta T} > C - \alpha\Delta T - \beta\Delta T^2 - \text{etc.}$$

Daher ist allemal $dS = CdT$ (69. §.).

172. §.

1. Zusatz. Die Geschwindigkeit C selbst ist als eine Function von T betrachtet worden, T aber soll eine absolute veränderliche Größe (40. §.), daher $dT = 1$ (55. §.) seyn: aus (171. §.) erhalten wir demnach folgende merkwürdige Formuln:

I. $dS = CdT = C.$

II. $\frac{dS}{dT} = C.$

III. $d\left(\frac{dS}{dT}\right) = \frac{d^2S}{dT} = dC.$

173. §.

2. Zusatz. Um aber diese Formuln auf die Beurtheilung einer veränderlichen Bewegung anwenden zu können, muß man im Stande seyn, die Geschwindigkeit C, für jede Zeit T zu schätzen: sie ändert sich mit der Zeit T (166. §.); daher kann man sie nicht, wie die Geschwindigkeit bey einer gleichförmigen Bewegung, durch den in einer Secunde zurückgelegten Weg schätzen (170. §.). Indessen wird sie genugsam bestimmt, wenn man durch sie den Weg verstehet, welchen der bewegliche Punct nach verflossener Zeit T in der zunächst darauf folgenden Secunde durchlaufen würde, wenn am Ende der Zeit T alle Aenderung der Bewegung aufhörte, der Punct demnach mit der binnen der Zeit T erlangten ungeänderten Geschwindigkeit C fortgienge. Kennt man die Function von T, welche C geben soll; so wird man nach der ersten Formul (172. §.) den Raum S bestimmen können, welchen der bewegliche Punct binnen der Zeit T durchläuft, in welcher er die Geschwindigkeit C erlanget. Ist die Function von T bekannt, welche S giebt; so wird man nach der zweyten Formul (172. §.) die Geschwindigkeit C finden können, welche der bewegliche Punct binnen der Zeit T erlangen muß, in welcher er den Raum S durchläuft.

174. §.

Erklärung. Unter allen veränderlichen Bewegungen ist die gleichförmig beschleunigte, und gleichförmig verzögerte am merkwürdigsten. Wenn nämlich die veränderliche Bewegung mit allmählich zu- oder abnehmender Geschwin-

schwindigkeit geschieht; so heißt sie eine beschleunigte, im ersten Fall, oder eine verzögerte Bewegung im zweyten Fall. In dem bestimmten Fall aber, wenn die Geschwindigkeit gerade wie die Zeit bey der beschleunigten Bewegung wächst, und bey der verzögerten abnimmt; so nennt man sie eine gleichförmig beschleunigte, oder gleichförmig verzögerte Bewegung.

175. §.

Aufgabe. Die Geschwindigkeit k, welche ein Punct bey der gleichförmig beschleunigten Bewegung in der ersten Secunde erlangen mag, ist gegeben; man soll den Weg S finden, welchen er in einer Zeit T zurücklegt.

Auflösung. Wenn C die Geschwindigkeit ist, welche der bewegte Punct binnen der Zeit T erlanget; so ist $1'' : T = k : C$ (174. §.), daher $C = kT$, wenn T den Exponenten des Verhältnisses der Zeit, welcher die Geschwindigkeit C zugehören soll, gegen eine Secunde bedeutet. Es ist aber allemal $dS = CdT$ (171. §.): bey der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist also $dS = kTdT$, und das Integral davon $S = \frac{1}{2}kT^2 + Const.$ Da aber der Weg, welcher binnen der Zeit T zurückgelegt wird, gleich Null werden muß, wenn T gleich Null wird; so ist $Const = 0$, und der ganze Weg $S = \frac{1}{2}kT^2$.

176. §.

1. Zusatz. Heißt g der Weg, welchen der bewegte Punct in der ersten Secunde zurücklegt; so ist $g = \frac{1}{2}k$,

und

und $k = 2g$ die in der ersten Secunde erlangte Geschwindigkeit (175. §.).

177. §.

2. Zusatz. Aus (175. 176. §.) findet man folgende Formuln, wornach man jede gleichförmig beschleunigte Bewegung wird vollständig beurtheilen können, sobald der Raum g bekannt ist, welchen der bewegte Punct in der ersten Secunde durchläuft.

$$\text{I. } C = 2gT. \qquad \text{II. } T = \frac{C}{2g}.$$

$$\text{III. } S = gT^2. \qquad \text{IV. } T = \sqrt{\frac{S}{g}}.$$

$$\text{V. } S = \frac{C^2}{4g}. \qquad \text{VI. } C = 2\sqrt{gS}.$$

178. §.

3. Zusatz. Den darüber angestellten Beobachtungen zufolge geschieht der freye Fall schwerer Körper mit gleichförmig beschleunigter Bewegung: zur vollkommenen Beurtheilung derselben dienen also die Formuln in (177. §.), wobey g die Höhe des freyen Falls in der ersten Zeitsecunde, S aber die Höhe des Falls in T Secunden, und C die bey demselben Fall erlangte Geschwindigkeit bedeutet. Dazu ist aber nöthig, daß man die Höhe g kenne: könnte man die Höhe S des freyen Falls in einer Anzahl T von Secunden genau genug beobachten; so würde man daraus $g = \frac{S}{T^2}$ (177. §.) herleiten können. Wir werden unten eine genauere Methode kennen lernen, wornach g sich bestimmen läßt: man findet nach ihr, daß ein schwerer Körper im

leeren Raume in der ersten Secunde durch die Höhe g = 15,625 Rheinl. Fuß fällt, mithin binnen der ersten Secunde die Geschwindigkeit k = 2g (176. §.) = 31,25 Rheinl. Fuß erlanget.

179. §.

Wir haben bisher die Bewegung einzelner Puncte in Betrachtung gezogen, und diejenigen allgemeinen Formuln angegeben, nach welchen sie beurtheilt werden kann: nun wollen wir auch die Bewegung der Körper in Erwägung ziehen, welche von der Bewegung aller einzelnen Puncte abhängt, die an ihm gedacht werden können. Der einfachste Fall dabey ist, wenn der Körper sich dergestalt bewegt, daß alle seine Puncte in geraden und einander parallelen Linien fortgehen: in diesem Fall, auf welchen auch folgende Untersuchungen eingeschränkt werden sollen, gehen alle Puncte des ganzen Körpers mit einerley Geschwindigkeit fort, und alle legen in einerley Zeit gleiche Wege zurück (165. §.): diese gemeinschaftliche Geschwindigkeit aller Punkte ist die Geschwindigkeit des ganzen Körpers; der Weg, den er in einer bestimmten Zeit durchläuft, ist der Raum, welchen was immer für ein Punct von ihm binnen derselben Zeit durchläuft. Daher kann man in diesem Fall den ganzen Körper als einen Punct betrachten, als wenn seine gesammte Masse in seinem Schwerpuncte beysammen wäre: und alsdann wird man seine Bewegung nach der bisherigen Theorie, als die Bewegung eines Puncts, bestimmen können.

180. §.

Da aber jede Bewegung von irgend einer bewegenden Kraft abhängt, durch deren Größe sie vollkommen bestimmt wird: so müssen wir nun auch untersuchen, welchen Einfluß die bewegenden Kräfte in die gesammte Bewegung eines Körpers haben, und wie sich diese durch die Kräfte selbst bestimmen läßt. Eine der bekanntesten Kräfte in der Natur ist die Schwere, und diese nimmt man zum gemeinschaftlichen Maaß aller übrigen Kräfte.

181. §.

Erklärung. Alle Kräfte können in unveränderliche und veränderliche eingetheilt werden. Wenn eine Kraft von dem ersten Augenblicke der Bewegung an, in jedem folgenden Augenblicke gleich stark den Körper, der von ihr bewegt wird, drückt; so heißt sie eine unveränderliche Kraft, wie die Schwere ist: wenn aber eine Kraft den Körper, welcher von ihr bewegt wird, nicht in jedem Augenblicke während der Bewegung gleich stark drückt; so wird sie eine veränderliche Kraft genannt.

182. §.

Erklärung. Alle, sowohl unveränderliche, als veränderliche Kräfte können mit der Schwere, als der bekanntesten unveränderlichen Kraft, verglichen, und, ihrer Größe nach, durch gewisse Gewichte geschätzt werden. Die Größe einer unveränderlichen Kraft bleibt in jedem Augenblicke während der Bewegung dieselbe (181. §.): sie kann einem Gewichte gleichgesetzt werden, von welchem der körperliche Punct, worauf jene Kraft wirken mag, eben so stark

unterwärts gedruckt werden würde, wenn daſſelbe frey an ihm herab hienge, als er von jener Kraft nach der Richtung gedruckt wird, nach welcher ſie auf ihn wirkt. Auf dieſe Art kann auch jede veränderliche Kraft einem Gewichte gleich geſetzt werden, mit dem Unterſchiede nur, daß dieſes Gewicht in jedem Augenblicke während der Bewegung größer oder kleiner ſeyn muß, nachdem die Kraft ſelbſt größer oder kleiner geworden iſt (181. §.) Hieraus erhellet, wie man ſich gleiche und ungleiche bewegende Kräfte vorſtellen kann.

183. §.

Lehrſatz. Wenn zweene Puncte von zwoen unveränderlichen und gleichen Kräften in geraden Linien getrieben werden; ſo müſſen die Räume, welche ſie in einer gewiſſen Zeit zurücklegen mögen, einander gleich ſeyn.

Beweis. Ein Punct a werde von der Kraft v, und ein anderer Punct A von der Kraft V getrieben. Da nun die Kräfte v, V unveränderlich ſind; ſo werden die Puncte a, A von ihnen in jedem folgenden Augenblicke während der Bewegung eben ſo ſtark, als im erſten Augenblicke, da die Bewegung den Anfang nimmt, gedrückt (181. §.): da alſo zugleich v, V gleiche Kräfte ſind; ſo muß nothwendig der Punct a von der Kraft v ſowohl im erſten, als in jedem folgenden Augenblicke eben ſo ſtark gedrückt werden, wie ſtark der andere Punct A von der Kraft V gedrückt wird (182. §.): die Puncte a, A werden alſo von den Kräften v, V durch gleiche Räume in gleichen Zeiten fortgeführt werden.

184. §.

184. §.

Lehrsatz. Die Räume, welche zweene von zwoen unveränderlichen Kräften getriebene Puncte in einer Zeit zurücklegen, verhalten sich gegen einander gerade wie dieselben Kräfte.

Beweis. 1, Wenn ein Punct von mehreren Kräften nach einer geradlinichten Richtung getrieben wird; so muß der Raum, den er in einer gewissen Zeit durchlaufen mag, der Summe derjenigen Räume gleich seyn, die er in derselben Zeit durchlaufen würde, wenn auf ihn jene einzeln genommene Kräfte wirkten.

2. Wenn ferner auf einen Punkt eine Kraft k, und auf einen andern eine rmal größere K in einem gewissen Augenblicke wirkt; so kann man annehmen, daß auf diesen andern Punct in demselben Augenblicke gleiche Kräfte k, k, k, - - - k, r an der Zahl wirken, deren Summe = K ist (182. §.).

3. Wäre daher die auf den Punct A wirkende unveränderliche Kraft rmal so groß, als die auf den Punct a wirkt; so müßte auch der Raum, welchen A in einer gewissen Zeit zurücklegte, rmal so groß seyn, als der Raum, den a in derselben Zeit durchliefe (2) 1), und (183. §.).

4. Bestünde hingegen die auf den Punct A wirkende unveränderliche Kraft P aus m nteln der auf den Punct a wirkenden Kraft p; so müßte auch der Weg Z, welchen A binnen einer Zeit T durchliefe, aus m nteln des Raumes z bestehen, welchen a in derselben Zeit T durchliefe. Denn wenn man sich einen dritten Punct α denkt, welcher von

einer unveränderlichen Kraft, die einem ntel von p gleich seyn mag, getrieben werden soll; so ist mmal, und z nmal so groß, als der Raum, welchen α in der Zeit T durchlaufen würde (3), das heißt: dieser Raum ist ein ntel von z, und Z aus m solchen nteln zusammengesetzt.

5. Nun sey v die auf den Punct a, und V die auf A wirkende unveränderliche Kraft: der Weg, welchen a in der Zeit T zurücklegt, sey s, und der, welchen A in derselben Zeit durchläuft, sey S.

Die Kräfte v, V sind entweder commensurabel, oder incommensurabel. Sind v, V zwo commensurable Kräfte; so muß entweder v ganz, oder irgend ein ntel von v einem mtel von V gleich seyn, das heißt: in diesem Fall giebt es gewiß eine ganze Zahl m, wofür V entweder mmal so groß als v, oder m mal so groß als ein ntel von v ist, n mag was immer für eine andere ganze Zahl seyn. Also hat man bey dieser Voraussetzung, für gewisse ganze Zahlen m, n,

$$V = vn \text{ oder } V = v\frac{m}{n};$$

daher auch nach (3) 4)

$$S = sn \text{ oder } S = s\frac{m}{n}.$$

Folglich muß $\frac{V}{v} = n$ und $\frac{S}{s} = n$, oder $\frac{V}{v} = \frac{m}{n}$, und $\frac{S}{s} = \frac{m}{n}$, mithin $\frac{V}{v} = \frac{S}{s}$, und $S : s = V : v$ seyn.

Seyen ferner V, v incommensurable Kräfte; so giebt es keine Kraft, sie mag wie immer klein gedacht werden, welche

welche ein gemeinschaftlicher aliquoter Theil von V und v wäre, es muß vielmehr für jedes mögliche ntel von v eine ganze Zahl m möglich seyn, für welche

$$\text{I. } V > v\frac{m}{n} \text{ und zugleich } V < v\frac{m+1}{n}$$

seyn würde. Man denke sich nun eine Kraft α, welche der Differenz der Kräfte V und $v\frac{m}{n}$ gleich ist; so wird der Punct A eigentlich von einer Kraft $V = v\frac{m}{n} + \alpha$ getrieben, und muß daher in der Zeit T einen Weg zurücklegen, welcher der Summe derjenigen Räume gleich ist, die er in derselben Zeit zurücklegen würde, wenn er allein von $v\frac{m}{n}$, und allein von α bewegt würde: da er also wegen der Kraft $v\frac{m}{n}$, gewiß den Weg $s\frac{m}{n}$ durchlaufen müßte (4), und wegen der Kraft V den Weg S durchlaufen soll; so ist $S > s\frac{m}{n}$. Aus gleichen Gründen findet man, daß $S < s\frac{m+1}{n}$ seyn muß. Wir haben demnach

$$\text{II. } S > s\frac{m}{n} \text{ und zugleich } S < s\frac{m+1}{n}.$$

Aus I) II) erhält man

$$sV > Sv\frac{m}{m+1} \text{ und } sV < Sv\frac{m+1}{m},$$

oder

$$sV > Sv - \frac{Sv}{m+1} \text{ und } sV < Sv + \frac{Sv}{m}.$$

Es ist aber $Sv - \frac{Sv}{m+1} > Sv - \frac{Sv}{m}$: also ist auch

$$sV > Sv - \frac{Sv}{m} \text{ und } sV < Sv + \frac{Sv}{m}.$$

Nun ist dieses allemal richtig, die Zahl m mag wie immer groß seyn, und es ist allemal eine ganze Zahl m möglich, wofür ein mtel von Sv kleiner seyn würde, als jede wie immer kleine denkbare gleichartige Größe: also ist $sV = Sv$ (8. §.), und nun $S:s = V:v$.

185. §.

Aufgabe. Ein Körper, dessen Masse M heißen mag, wird von einer unveränderlichen Kraft V nach der durch seinen Schwerpunct fortgehenden Richtung getrieben; man soll den Weg S bestimmen, welchen er bloß wegen der Kraft V binnen einer gewissen Zeit T zurücklegen würde.

Auflösung. Es wird nämlich hier vorausgesetzt, daß der Körper ohne alle Schwere ist: freylich ist er wirklich schwer; aber man will nur seine bloß von der Kraft V abhängige Bewegung bestimmen, als wenn er auf einem horizontalen Boden läge, und ihn darauf die Kraft V nach der durch seinen Schwerpunct gehenden, und zu demselben Boden parallelen Richtung triebe.

1. Gesetzt nun, der Körper, dessen Masse M ist, lege in der Zeit T den Weg S zurück, wenn er von der unveränderlichen Kraft V getrieben wird, und seine Schwere in die Bewegung keinen Einfluß hat.

2. Da

2. Da aber derselbe Körper wirklich schwer ist; so kann man sich die Vorstellung machen, er falle vermöge seiner Schwere frey herab, und zwar durch eine Höhe s, in der Zeit T. Die Kraft, welche auf ihn binnen der ganzen Zeit T wirkt, ist sein unveränderliches Gewicht, dem die Masse M proportional ist.

3. Aus (1) 2) wegen (184. §.) erhält man demnach $S:s=V:M$, daher $S=\frac{Vs}{M}$. Es ist aber $s=gT^2$ (178. 177. §.): also muß seyn

$$S=\frac{gV}{M}T^2.$$

186. §.

1. Zusatz. Dieses giebt $dS=\frac{2gV}{M}TdT$, demnach $\frac{dS}{dT}=\frac{2gV}{M}T$. Die Geschwindigkeit C, welche ein Körper von der Masse M binnen der Zeit T erlangen würde, wenn ihn eine unveränderliche Kraft V, nach der durch seinen Schwerpunct fortgehenden Richtung triebe, ist also (172. §.)

$$C=\frac{2gV}{M}T.$$

187. §.

2. Zusatz. Sucht man den Werth von T aus der Formul in (186. §.); so findet man dafür nach (185. §.)

$$S=\frac{MC^2}{4gV}.$$

188. §.

3. Zusatz. Der Werth von g ist bekannt (178. §.): die Bewegung einer gegebenen Masse M, welche von einer gegebenen unveränderlichen Kraft V nach der durch ihren Schwerpunct gehenden Richtung getrieben wird, kann also nach (185. 186. 187. §.) vollkommen bestimmt werden. Es erhellet auch aus (186. 174. §.), daß sie allemal eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ist, indem die Geschwindigkeiten C, c, welche die Masse M in zwoen verschiedenen Zeiten T, t, vom Anfange der Bewegung an gerechnet, erlangen mag, sich, wegen $C=\frac{2gV}{M}T$, $c=\frac{2gVt}{m}$, gerade wie die Zeiten T, t verhalten.

189. §.

Aufgabe. Eine Masse M wird von einer veränderlichen Kraft U, nach der durch ihren Schwerpunct fortgebenden Richtung bewegt, ohne daß die Schwere irgend einen Einfluß in ihre Bewegung hat; man soll die Geschwindigkeit C bestimmen, welche sie in einer Zeit T erlangen würde.

Auflösung. 1. Es bedeutet hier U die Kraft, welche die Masse M in Bewegung setzt, und vom ersten Augenblicke an, sich während der Bewegung beständig ändert, zu- oder abnimmt. Diese Zunahme sowohl als Abnahme kann nach unzählbaren Gesetzen geschehen, wovon keines hier bestimmt wird: daher wird hier eine solche Formul verlangt, welche ganz allgemein angeben soll, wie C von T, U und M bey allen möglichen Gesetzen abhängt, nach welchen die bewe-

bewegende Kraft U sich vom ersten Augenblicke an während der Bewegung ändern kann.

2. Je mehr Zeit vom Anfange der Bewegung an verfließt, desto größer ist die Aenderung, welche die anfängliche Kraft U leidet: wenn wir also annehmen, die Kraft U habe sich binnen einer Zeit T dergestalt geändert, daß sie am Ende derselben Zeit einer Kraft V gleich ist; so kann man sowohl die binnen der Zeit T zu erzeugende Geschwindigkeit C, als die Kraft V als eine Function von T, und T als eine absolute veränderliche Größe betrachten (40. §.).

3. Da nun hier zweene Fälle in Betrachtung müssen gezogen werden, nämlich der Fall einer allmählich zunehmenden, und der einer abnehmenden Kraft; so nehmen wir zuerst an, es sey von einer wachsenden Kraft die Rede. Wenn nach Verlauf der Zeit T, die Masse M fortbewegt wird, und diese Bewegung noch eine Zeit ΔT lang fortdauert; so wächst ihre Geschwindigkeit C binnen der Zeit ΔT um ein Stück ΔC, und die Kraft V wächst um ein Stück ΔV (2): die Masse M wird also im letzten Augenblicke der Zeit T, und im ersten des darauf folgenden Zeittheilchens ΔT von der Kraft V getrieben, welche allmählich wächst, bis sie in $V+\Delta V$ am Ende der Zeit ΔT übergeht; die von ihr binnen der Zeit ΔT erzeugte Geschwindigkeit (165. §.) muß daher größer seyn, als die Geschwindigkeit, welche die Masse M binnen der Zeit ΔT erlangen würde, wenn auf sie binnen der ganzen Zeit ΔT eine unveränderliche Kraft $= V$ wirkte, und zugleich kleiner als die Geschwindigkeit, die sie erlangen müßte, wenn sie binnen

der-

derselben Zeit von einer unveränderlichen Kraft $= V + \Delta V$ fortgetrieben würde. Demnach ist nach (186. §.) allemal

$$\Delta C > \frac{2gV}{M}\Delta T \text{ und } \Delta C < \frac{2g(V+\Delta V)\Delta T}{M}..$$

4. Nehmen wir hingegen an, die Kraft V nehme allmählich ab, so daß sie binnen der Zeit ΔT um ΔV kleiner wird; so wird nun im ersten Augenblicke der Zeit ΔT die Kraft V, in jedem folgenden Augenblicke aber eine allmählich kleinere, und im letzten Augenblicke die Kraft $V - \Delta V$ in die Masse M wirken: ihre binnen der Zeit ΔT erzeugte Geschwindigkeit ΔC wird nun kleiner seyn als die Geschwindigkeit welche in ihr die Kraft V in der Zeit ΔT erzeugen würde, wenn V unveränderlich wäre, und zugleich größer als die Geschwindigkeit, welche die Masse M in der Zeit ΔT erlangen müßte, wenn binnen der ganzen Zeit ΔT eine unveränderliche Kraft $= V - \Delta V$ auf sie wirkte. Nach (186, §.) wäre also allemal

$$\Delta C > \frac{2g(V-\Delta V)\Delta T}{M} \text{ und } \Delta C < \frac{2gV\Delta T}{M}..$$

5. Es mag ferner die Kraft V was immer für eine Function von T seyn (2); so sollen doch gewisse von ΔT unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. möglich seyn, wofür ist $\Delta V = \alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \gamma\Delta T^3 + \text{etc.}$ (59. §.): wegen (3) 4) ist also für jede Differenz ΔT der Zeit T als einer absoluten veränderlichen Größe (2)

$$\frac{\Delta C}{\Delta T} > \frac{2gV}{M} \text{ und } \frac{\Delta C}{\Delta T} < \frac{2gV}{M} + \frac{2g\alpha}{M}\Delta T + \frac{2g\beta}{M}\Delta T^2 + \text{etc.}$$

oder

oder

$$\frac{\Delta C}{\Delta T} > \frac{2gV}{M} - \frac{2g\alpha}{M}\Delta T - \frac{2g\beta}{M}\Delta T^2 - \text{etc.}$$

$$\text{und } \frac{\Delta C}{\Delta T} < \frac{2gV}{M}.$$

In beyden Fällen ist daher der Exponent des Differentialverhältnisses der Geschwindigkeit C, als einer Function von der Zeit T (2) nach (69. §.)

$$dC = \frac{2gV\,dT}{M}.$$

190. §.

1. Zusatz. Aus (172. 189. §.) erhält man für den Weg S, welchen die Masse M binnen der Zeit T zurücklegen würde,

$$d\left(\frac{dS}{dT}\right) = \frac{2gV}{M}\,dT.$$

Oder, weil T als eine absolute veränderliche Größe betrachtet wird, wofür $dT = 1$ constans ist,

$$d^2S = \frac{2gV}{M}\,dT^2.$$

191. §.

2. Zusatz. Ferner ist $dT = \frac{M\,dC}{2gV}$ in (189. §.): aus (172. §.) erhält man also

$$dS = \frac{M}{2g} \cdot \frac{C\,dC}{V}, \text{ daher}$$

$$S = \frac{M}{2g}\int \frac{C\,dC}{V}.$$

CdC

$$\int dC = \frac{2gV}{M} dS,$$

$$C^2 = \frac{4g}{M} \int V dS.$$

192. §.

Die Formuln, die wir bisher gesucht haben, enthalten die allgemeinsten Gründe der gesammten Mechanik, die man wirklich in seiner Gewalt hat, sobald man sie geschickt anzuwenden, und die dabey vorkommenden Differentialexponenten zu integriren im Stande ist. Ich will in einem Beyspiele zeigen, worauf es bey der Anwendung der vorhergehenden Theorie auf die Bestimmung der Bewegung eines gegebenen Körpers ankömmt, wenn er von einer veränderlichen Kraft getrieben wird.

21. Fig. 1. Man nehme an, auf einem horizontalen Boden UX (21. Fig.) liege ein Körper Aa, dessen Gewicht, und die ihm proportionale Masse = P sey: nach der ebenfalls horizontalen Richtung AB, welche daher zu UX parallel ist, und zugleich durch den Schwerpunct des Körpers Aa fortgeht, wirke auf ihn eine veränderliche Kraft V. Nun aber soll die Bewegung des Körpers Aa, welche in ihm die Kraft V hervorbringt, bestimmt werden.

2. Diese Bestimmung erfordert, daß man im Stande sey, sowohl den Raum S, welchen der Körper Aa in einer gegebenen Zeit T durchlaufen, und die Geschwindigkeit C anzugeben, welche er binnen derselben Zeit erlangen würde. Beydes kann nach der vorhergehenden Theorie mit Hülfe der Integralrechnung geschehen, wenn nur das Gesetz gegeben

wird,

wird, nach welchem die Kraft V sich vom ersten Augenblicke der Bewegung an ändert, damit man durch dasselbe Gesetz bestimmen könne, wie V von C oder T abhängt: denn, wenn dieses bekannt wäre; so könnte man V durch eine Function von C oder T bestimmen, sodann die ganze Bewegung des Körpers Aa beurtheilen. Wüßte man z. B. die Function $F = V$ von T; so hätte man $dC = \frac{2gFdT}{M}$, und die Integration gäbe $C = \frac{2g}{M}\int FdT$: für die so gefundene Geschwindigkeit C könnte man hierauf den Weg S aus der Formal $dS = CdT$ suchen.

3. Nehmen wir an, die Kraft V nehme allmählich ab; der Verlust binnen jeder Zeit T sey der Quadratwurzel derselben Zeit proportional: es sey ferner der bestimmte Verlust φ an der Kraft V für die erste Zeitsecunde bekannt. Bey dieser Voraussetzung soll nun die Bewegung des Körpers Aa auf dem horizontalen Boden UX bestimmt werden.

4. Wegen $1'' : \sqrt{T} = \varphi : \varphi T^{\frac{1}{2}}$ nach (3) ist $\varphi T^{\frac{1}{2}}$ der Verlust an der Kraft V für die ganze Zeit T: nach Verlauf der Zeit T wirkt also, statt der anfänglichen Kraft V, die Kraft $V - \varphi T^{\frac{1}{2}}$ auf den Körper Aa.

5. Das Gewicht P des Körpers Aa wird vom horizontalen Boden UX getragen, und dasselbe hat keinen Einfluß in die von der, nach der horizontalen, und durch den Schwerpunct von Aa gehenden Richtung AB der Kraft V abhängige Bewegung des Körpers Aa: wenn wir daher

voraus-

voraussetzen, daß zwischen ihm und dem Boden UX keine Reibung vorhanden ist; so ist keine Kraft da, die der Kraft V entgegen stünde. Am Ende der Zeit T wird also die Bewegung des Körpers Aa von einer Kraft $V-\varphi T^{\frac{1}{2}}$ abhängen (4). Daher, weil P die dem Gewichte von Aa proportionale Masse bedeutet, erhält man für die Geschwindigkeit C, welche der Körper Aa binnen der Zeit T erlangen muß, nach (189. §.)

$$dC=\frac{2g}{P}\left(V-\varphi T^{\frac{1}{2}}\right)dT.$$

Also ist die Geschwindigkeit selbst

$$C=\int\frac{2g}{P}\left(VdT-\varphi T^{\frac{1}{2}}dT\right)$$

$$=\frac{2g}{P}\left(VT-\frac{2}{3}\varphi T^{\frac{3}{2}}\right)+\text{Const.}$$

Da ferner diese Geschwindigkeit im Anfange der Bewegung $=0$ seyn soll, nämlich $C=0$ für $T=0$; so ist $\text{Const}=0$: also die vollständige Geschwindigkeit für jede Zeit T

$$C=\frac{2g}{P}\left(VT-\frac{2}{3}\varphi T^{\frac{3}{2}}\right).$$

6. Es ist aber bey jeder Bewegung $dS=CdT$ (172. §.): bey dieser Bewegung muß demnach seyn, nach (5)

$$dS=\frac{2g}{P}\left(VT-\frac{2}{3}\varphi T^{\frac{3}{2}}\right)dT: \text{ also}$$

$$S=\frac{2g}{P}\left(\frac{1}{2}VT^{2}-\frac{4}{15}\varphi T^{\frac{5}{2}}\right)+\text{Const.}$$

Weil

Weil hier $S=0$ für $T=0$ seyn muß; so ist auch Const $=0$: also ist

$$S=\frac{2g}{P}\left(\frac{1}{2}VT^2-\frac{4}{15}\varphi T^{\frac{5}{2}}\right)$$

der ganze Raum, welchen der Körper Aa auf dem horizontalen Boden UX binnen der Zeit T durchlaufen muß.

7. Die Geschwindigkeit in (5) wird zweymal gleich Null, für $T=0$, und für $T=\frac{9V^2}{4\varphi^2}$: hieraus folgt, daß sie am Ende einer gewissen Zeit T, zwischen $T=0$ und $T=\frac{9V^2}{4\varphi^2}$ am größten wird. Diese Zeit zu bestimmen, setze man dC in (5) gleich Null, nach (II. Band, 74. §.): dafür erhält man auch

$$V-\varphi T^{\frac{1}{2}}=0: \text{ also } T=\frac{V^2}{\varphi^2}.$$

Diese Zeit giebt in (5)

$$C=\frac{2g}{P}\left(\frac{V^3}{\varphi^2}-\frac{2}{3}\varphi\cdot\frac{V^3}{\varphi^3}\right)=\frac{2gV^3}{3P\varphi^2}.$$

8. Es war aber $V-\varphi T^{\frac{1}{2}}$ die Kraft, welche nach Verlauf der Zeit T im nächst folgenden Augenblicke auf den Körper Aa wirken, und seine Bewegung ferner beschleunigen sollte (5): da sie also in der Zeit, und für die Geschwindigkeit, die wir in (7) bestimmt haben, gleich Null wird; so erhellet daraus, daß die Bewegung des Körpers Aa nur so lange beschleunigt wird, bis er in der bestimmten Zeit $T=\frac{V^2}{\varphi^2}$ die Geschwindigkeit $C=\frac{2gV^3}{3P\varphi^2}$ erlanget (7), womit er hierauf gleichförmig fortgehen muß, wenn sonst nichts da ist, was seine Bewegung hindern mag.

9. Will nun den Raum wissen, welchen der Körper A a durchlaufen muß, bis er die größte Geschwindigkeit (7). erlanget; so nehme man den Werth von T aus (7) in (6): denn er giebt:

$$S = \frac{2g}{P}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{V^5}{\varphi^4} - \frac{4}{15}\varphi\cdot\frac{V^5}{\varphi^5}\right) = \frac{7gV^5}{15P\varphi^4} = \frac{7V^4}{10\varphi^3}C. \quad (8)$$

Z. B. Sey des Körpers A a Gewicht, und die ihm proportionale Masse P = 300 ℔; die anfängliche Kraft V = 60 ℔; und ihr Verlust in der ersten Secunde φ = 10 ℔; und wegen (178. §.) g = 15,625 Rheinl. Fuß: so ist in (8) 9).

$$T = \frac{60.60}{10.10} = 36''.$$

$$C = \frac{2.15,625.60.60.60}{3.300.10.10} = 75 \text{ Fuß}.$$

$$S = \frac{7.60.60.75}{10.10.10} = 1890 \text{ Fuß}.$$

Der Körper A a fängt daher an, mit beschleunigter Bewegung vorzurücken; diese Bewegung dauret aber nur 36 Secunden = T, binnen welcher Zeit er einen 1890 Rheinl. Fuß langen Weg zurücklegt, und eine Geschwindigkeit = 75 Fuß erlanget, womit er darauf gleichförmig fortgehet, so daß er in jeder Secunde 75 Fuß, mithin in jeder Zeit t einen Weg = 75.t Fuß durchläuft (170. §.).

193. §.

7. Fig. **Aufgabe.** Ein Punct ist mit der Geschwindigkeit c an den Punct A einer krummen Linie A B C D E angelangt, mit welcher er seine Bewegung in der selben

selben krummen Linie fortsetzen soll: es ist sonst keine Kraft da, welche seine Bewegung beschleunigen, auch nichts ist da, die Krümmung des Weges ABCDE ausgenommen, welches dieselbe Bewegung verzögern könnte. Man soll die Geschwindigkeit finden, die er am Ende E derselben Linie haben wird.

Auflösung. 1. Es soll möglich seyn, am Puncte A eine Tangente zu ziehen, und damit eine Sehne AB unter einem sehr kleinen Winkel ω zu verbinden, dergestalt, daß hierauf mehrere andere Sehnen BC, CD, DE gezogen werden können, derer jede gegen die nächst vorhergehende eben die Lage habe, welche die erste AB gegen die Tangente an A hat, daß demnach der Winkel $bBC = cCD, = dDE = \omega$ ist. Je kleiner der gemeinschaftliche Neigungswinkel ω angenommen wird, desto mehrere und kleinere Sehnen werden da seyn, und desto mehr wird sich die aus ihnen bestehende gebrochene Linie ABCDE der krummen Linie ACE nähern, wenn gleich der letzte Punct jener Linie, mit dem letzten Puncte E der krummen Linie vielleicht nie genau zusammenfällt. Aus dem allen kann man indessen nichts mehr abnehmen, als daß die krumme Linie ACE die Gränze ist, welcher sich die gebrochene Linie ABCDE ohne Ende nähern kann, wenn der gemeinschaftliche Neigungswinkel ω ihrer Seiten ohne Ende abnimmt: doch folgt hieraus ganz gewiß, daß auch die Geschwindigkeit, welche der bewegte Punct im Puncte E der krummen Linie ACE haben würde, wenn er von A an, in derselben krummen Linie bis E fortgienge, als die Gränze kann betrachtet werden, welcher die Geschwin-

digkeit, die der bewegte Punct am Ende der gebrochenen Linie ABCDE erlangen würde, wenn er sich von A an in dieser Linie bewegte, ohne Ende nähern muß, wenn beym unaufhörlich abnehmenden Neigungswinkel $\omega = bBC = cCD =$ etc. die Anzahl der Sehnen AB, BC, etc. ohne Ende zunimmt.

2. Bey der Bestimmung der Geschwindigkeit, welche der bewegte Punct am Endpuncte E, der krummen Linie ACE haben muß, kömmt daher alles darauf an, daß man den Neigungswinkel $\omega = bBC = cCD =$ etc. und damit auch die Anzahl der Sehnen AB, BC, etc. ganz unbestimmt annehme, hernach einen Ausdruck für die Geschwindigkeit suche, welche der bewegte Punct am Ende der so unbestimmten gebrochenen Linie ABCDE haben muß, und dann untersuche, ob es nicht einen völlig bestimmten Werth giebt, welchem derselbe Ausdruck als seiner Gränze sich nähern müßte, wenn der Neigungswinkel unaufhörlich abnähme: denn ein solcher Werth wird die verlangte Geschwindigkeit seyn (1).

6. Fig. 3. Gesetzt, ein Punct bewege sich mit einer unveränderlichen Geschwindigkeit k in der geraden Linie AB (6. Fig.), in B aber werde er genöthigt seine Richtung zu ändern, und über BC zu gehen. Der Neigungswinkel der Richtung AB gegen die neue BC sey $ABD = \omega$, Ab zu DC parallel, und Ad, bB auf DC senkrecht. Setzt man die Geschwindigkeit $k = AB$; so wird diese in die Seitengeschwindigkeiten $Ab = AB\,\mathrm{Cos}\,ABD$, und $Ad = AB\,\mathrm{Sin}\,ABD$ zerlegt: die zweyte Geschwindigkeit wird von DC zernichtet; die erste

ist

ist aber zu DC parallel, mithin drückt sie diejenige Geschwindigkeit aus, mit welcher der bewegte Punct seine Bewegung von B an über BC fortsetzen würde: diese ist daher $= AB \operatorname{Cos} ABD = k \operatorname{Cos} \omega$.

4. Nehmen wir daher an, der bewegliche Punct, welcher mit der Geschwindigkeit c an den Punct A der krummen Linie ACE angelangt ist, werde genöthigt, seine Bewegung in der gebrochenen Linie ABCDE fortzusetzen, welche aus einer unbestimmten Anzahl von Seiten AB, BC, CD, etc. bestehen mag, die gegen einander einerley von dem unbestimmten Winkel $\omega = CBC = cCD = dDE$, etc. abhängige Lage haben (1) 2): so hat derselbe Punct am Endpuncte B der ersten Sehne AB eine Geschwindigkeit $= c \operatorname{Cos} \omega$ nach (3); daher ist $c \operatorname{Cos} \omega^2$ seine Geschwindigkeit am Ende der zweyten Sehne BC, nach (3), und wenn $c \operatorname{Cos} \omega^n$ die Geschwindigkeit wäre, welche er am Ende der nten Sehne haben müßte; so hätte er am Ende der $(n+1)$ten Sehne die Geschwindigkeit $= c \operatorname{Cos} \omega^n . \operatorname{Cos} \omega$ nach (2) $= c \operatorname{Cos} \omega^{n+1}$. Die gebrochene Linie ABCDE mag daher was immer für eine Anzahl r von Seiten haben; so ist doch allemal $c \operatorname{Cos} \omega^r$ die Geschwindigkeit, welche der bewegte Punct an ihrem Endpuncte haben müßte. Wegen (28. §.) ist sie also: 7. Fig.

$$c\left(1 - \frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{\omega^6}{1.2\ldots6} + \frac{\omega^8}{1.2\ldots8} - \text{etc.}\right)^r.$$

und für

$$Z = -\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{\omega^6}{1.2\ldots6} + \text{etc.}$$ ist sie

$$c(1+Z)^r = c\Big(1 + rZ + \frac{r(r-1)}{1.2}Z^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}Z^3 + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3.4}Z^4 + \ldots + Z^r\Big)$$

$$= c + c\Big(rZ + \frac{r(r-1)}{1.2}Z^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}Z^3 + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3.4}Z^4 + \ldots + Z^r\Big).$$

Nimmt nun den Winkel φ allmählich ab; so nähert sich Z der Gränze $= 0$, der Unterschied zwischen $c(1+Z)^r$ und c wird immer kleiner, und man sieht nicht ein, warum er, wegen Z, kleiner werden kann, als jede wie immer kleine denkbare gleichartige Größe (3. §.), wie immer auch die Anzahl r der Sehnen beym abnehmenden gemeinschaftlichen Neigungswinkel ω zunimmt: c ist also die Gränze, welcher die Geschwindigkeit $c(1+Z)^r$ sich nähert, ohne sie je zu erreichen, wenn nicht $\omega = 0$ gesetzt wird; und c ist daher auch die Geschwindigkeit, welche der bewegte Punct am Ende der krummen Linie ACE haben muß, wegen (a).

194. §.

Zusatz. Wenn ein Punct genöthigt wird, seine Bewegung mit irgend einer Geschwindigkeit c in einer krummen Linie fortzusetzen; so wird diese Geschwindigkeit wegen der Krümmung des Weges keine Aenderung leiden, es wird vielmehr derselbe Punct mit der ungeänderten Geschwindigkeit c fortgehen, wenn sonst nichts da ist, was seine Bewegung störte (193. §.) Daher wenn ein Punct von einer Kraft in einer krummen Linie beständig nach der Richtung der Tan-

Tangente an jeder Stelle getrieben wird; so wird seine Bewegung von derselben Kraft eben so geändert werden, als wenn sie nach der Richtung der Tangente geschehe.

195. §.

Lehrsatz. Wenn ein Körper bloß wegen seiner Schwere dergestalt bewegt wird, daß sein Schwerpunct eine krumme Linie AMC durchläuft, die ganz in einer verticalen Ebene liegt; so erlangt er in C eine Geschwindigkeit, die derjenigen gleich ist, welche er erlangen würde, wenn er frey durch die verticale Höhe BC fiele. 8. Fig.

Beweis. Es soll nämlich AB horizontal, und BC vertical, daher BC die Höhe des Punctes A über C seyn.

Sey s = AM der binnen einer Zeit bereits zurückgelegte Bogen, und v die in derselben Zeit erlangte Geschwindigkeit. MP = y sey parallel zu AB, und BP = x. Wird nun an M die Tangente TS gezogen; so ist nach (134. §.),

$$\text{Tang PMS} = \frac{dx}{-dy}; \text{ also ist}$$

$$\text{Sin PMS} = \frac{dx}{\sqrt{(dy^2+dx^2)}}.$$

Da sich nun der bewegte Körper an der Stelle M befindet, dergestalt, daß sein Schwerpunct mit dem Puncte M der krummen Linie AC zusammenfällt; so sey Ma zu BC parallel, folglich vertical, und die Richtung, nach welcher des bewegten Körpers Schwerpunct von seinem Gewichte, das wir P nennen wollen, unterwärts gedrückt wird. Ziehet man ab, aM auf TS senkrecht, und ac zu TS parallel;

so kann die Kraft P, von welcher der Schwerpunct nach der verticalen Richtung Ma gedrückt wird, wenn man sie = Ma setzt, in zwo Seitenkräfte, Mc = P Sin a Mb, und Mb = P Cos a Mb zerlegt werden. Von der ersten Kraft wird der Schwerpunct nach der auf die Tangente TS senkrechten Richtung gegen die krumme Linie AMC gedrückt, die daher von dieser ganz aufgehalten wird; aber die Richtung der Kraft Mb fällt mit der Tangente MS zusammen, sie allein giebt demnach diejenige bewegende Kraft ab, welche den Schwerpunct zur Fortsetzung der Bewegung über MC an der Stelle M antreibt. Wegen (194. §.) nach (191. §.) ist.

$$cdc = \frac{2g\,Mb}{P}\,ds = \frac{2gP\,Cos\,a\,Mb}{P}\,da$$

$$= 2g\,Sin\,PMS\,.\,ds.$$

Nimmt man demnach den obigen Werth für Sin PMS, und den von ds nach (144. §.); so findet man:

$cdc = 2gdx$, und dieses giebt

$\frac{1}{2}c^2 = 2gx$, $c^2 = 4gx$, und $c = 2\sqrt{gx}$.

Für $x = BC$ wäre demnach die Geschwindigkeit in C so groß, als die Geschwindigkeit $2\sqrt{g}.BC$, welche der schwere Körper beym freyen Fall durch die Höhe Bc erlangen würde (177. §.).

196. §.

9. Fig. **Erklärung.** Wenn eine gerade Linie RC (9. Fig.) um ihren festen Endpunct C bewegt wird; so beschreibt jeder ihrer Puncte in einer Zeit T einen Kreisbogen um C, etwa der Punct R den Bogen RS, und die ganze Linie durch-

durchläuft den Winkel RCS: die wahre Geschwindigkeit des Punctes R am Ende der Zeit T wird durch den Kreisbogen ST geschätzt, um welchen er in der nächsten darauf folgenden Zeitsecunde vorrücken würde, wenn die Geschwindigkeit, die er am Ende der Zeit T haben mag, ungeändert bliebe: hingegen wird dem Puncte R, und so auch allen Puncten der geraden Linie RC auch eine Winkelgeschwindigkeit zugeeignet, und durch den Winkel SCT geschätzt, um welchen die Linie RC, in der nach Verlauf der Zeit T nächstfolgenden Zeitsecunde weiter um C sich drehen würde, wenn ihre binnen derselben Zeit erlangte Winkelgeschwindigkeit ungeändert bliebe.

197. §.

1. Zusatz. Die wahren Geschwindigkeiten, welche einzelne Puncte einer geraden um ihren festen Endpunct C beweglichen Linie RC, während der Umdrehung in einer Zeit T erlangen können, verhalten sich gegen einander, wie ihre Entfernungen vom Mittelpuncte C der Bewegung (196. §.)

198. §.

2. Zusatz. Alle Winkel verhalten sich gegen einander wie die aus ihren Spitzen und zwischen ihren Schenkeln mit einem bestimmten Halbmesser beschriebenen Kreisbogen: in der Folge soll daher die Winkelgeschwindigkeit, welche eine gerade um C bewegliche Linie RC, und jeder ihrer Puncte binnen einer Zeit T erlangen mag, durch den aus C mit dem Halbmesser = 1, zwischen den Schenkeln CS, TC desjenigen Winkels SCT beschriebenen Bogen φ geschätzt

werden, der sonst jene Winkelgeschwindigkeit unterhalten sollte. (196. §.).

199. §.

3. Zusatz. Daher ist $ST : \varphi = SC : 1$ (198. §.), und nun $ST = \varphi . SC$, $\varphi = \frac{ST}{SC}$. Aus der wahren Geschwindigkeit eines Punkts R erhält man seine Winkelgeschwindigkeit, wenn man jene durch seine Entfernung vom Mittelpuncte der Bewegung dividirt; multiplicirt man hingegen damit die Winkelgeschwindigkeit; so giebt das Product die wahre Geschwindigkeit (196. 198. §.).

200. §.

4. Zusatz. Wenn am Puncte R sich eine Masse M befindet, welche als ein Punct, ganz in R beysammen mag betrachtet werden, und auf R eine unveränderliche Kraft U beständig nach der auf RC senkrechten Richtung RU wirkt; so wird die Bewegung des Puncts R und der an ihm befindlichen Masse M um C eben so beschleunigt werden, als wenn die Kraft U die Masse M nach der geradlinichten Richtung RU forttriebe (194. §.): binnen einer Zeit T erlanget also der Punct R und die Masse M nach (186. §.)

eine wahre Geschwindigkeit

$$c = \frac{2gU}{M} T,$$

und Winkelgeschwindigkeit (199. §.)

$$\gamma = \frac{c}{RC} = \frac{2gU}{M . RC} T.$$

201. §.

201. §.

5. Zusatz. Wäre hingegen ACa (10. Fig.) eine gebrochene, oder in C gebrochene um den festen Punct C bewegliche Linie, wobey im zweyten Fall der Winkel ACa unveränderlich seyn mag; so würde der an A stets nach der auf AC senkrechten Richtung AU wirkenden unveränderlichen Kraft U eine, an irgend einem andern Puncte a angebrachte Kraft $= \frac{U.AC}{aC}$ das Gleichgewicht halten, wofern sie nach entgegengesetzter, auf aC senkrechter Richtung aq wirkte; erfolgt demnach die Bewegung; so wird der Punct a nach der Richtung ar, von der Kraft U in jedem Augenblicke mit eben der Gewalt gedrückt, als wenn keine Kraft an A, sondern eine $= \frac{U.AC}{aC}$ an a nach der auf aC senkrechten Richtung ar wirkte. Befindet sich also eine wie ein Punct zu betrachtende Masse m an a; so ist die Winkelgeschwindigkeit G, welche der Punct a, mithin auch A (196. §.) wegen der auf A wirkenden Kraft U binnen der Zeit T erlanget, nach (200. §.).

10. Fig.

$$G = \frac{2g.U.AC}{aC} \cdot \frac{T}{m.aC} = \frac{2gU.AC}{m.aC^2} T.$$

202. §.

6. Zusatz. Ist MN (11. Fig.) eine feste Axe, womit zwey gerade unbiegsame Linien Ba, AB unter rechten Winkeln verbunden seyn mögen; so kann man sich die Vorstellung machen, daß, wenn eine unveränderliche Kraft U nach der auf AB senkrechten und mit AB in einer auf MN senkrechten Ebene liegenden Richtung wirkte, sich AB, und

11. Fig.

und $\alpha\beta$ mit einerley Winkelgeschwindigkeiten um MN drehen müßten, wie AC und aC in (201. §.), dergestalt, daß beyde Puncte β, A eine gewisse, binnen der Zeit T zu erlangende Winkelgeschwindigkeit γ oder G haben müßten, nachdem an A eine Masse M, oder keine an A, und eine m an β sich befände: daher wäre, wie in (200. 201. §.)

$$\gamma = \frac{2gU}{M.AB}T; \quad G = \frac{2g.U.AB}{m.\alpha\beta^2}T.$$

203. §.

7. Zusatz. Die Winkelgeschwindigkeiten γ, G werden in (202. §.) nur alsdann einander gleich seyn, wenn $\frac{1}{M.AB} = \frac{AB}{m.\alpha\beta^2}$, daher $m.\alpha\beta^2 = M.AB^2$ ist.

204. §.

8. Zusatz. In (202. §.) ist $U = \frac{m.\alpha\beta^2.G}{2g.AB.T}$ die Kraft, welche am Puncte A erfordert wird, eine gewisse Winkelgeschwindigkeit G, binnen einer Zeit T zu erzeugen: sie hängt von der am Puncte β befindlichen Masse dergestalt ab, daß sie bey gleichen übrigen Größen $\alpha\beta$, G, 2g, AB, T im geraden Verhältnisse mit m zu- und abnimmt.

205. §.

11. Fig. R, P, Q, S. **Aufgabe.** Es sind, so viel man will, Massen als eben so viele Puncte, sowohl unter einander, als mit einer festen Axe MN dergestalt verbunden, daß, sobald nur eine unter ihnen sich um MN zu drehen anfänge, alle sich um dieselbe Axe bewegen müssen: auf gleiche Art ist ein Punct A damit verbunden, auf welchen eine unveränderliche Kraft U bestän-

beſtändig nach der auf die Entfernung AB des Puncts A von der Umdrehungsaxe MN ſenkrechten, und in der ebenfalls auf MN ſenkrechten Ebene, worauf AB während der Umdrehung im Kreiſe herumgehen würde, liegenden Richtung auf A wirkt: man ſoll die Winkelgeſchwindigkeit des Puncts A für die Zeit T beſtimmen.

Auflöſung. 1. Es iſt klar, daß, wegen der Verbindung der Maſſen R, P, Q, S, und des Puncts A unter einander, und mit der Umdrehungsaxe MN, alle Puncte in eine ſolche Kreisbewegung um MN geſetzt werden müſſen, ſobald die Kraft U den Punct A in Bewegung ſetzt, wobey ihre ſenkrechten Entfernungen Rr, Pp, Qq, Ss, AB von MN in jeder Zeit T durch gleiche Winkel vorrücken, daß demnach alle Puncte einerley Winkelgeſchwindigkeit binnen jeder Zeit T erlangen müſſen, die wir K nennen wollen.

2. Nun wird zu jeder einzelnen Maſſe R, P, Q, S eine beſtimmte Kraft am Puncte A erfordert, die Winkelgeſchwindigkeit K in der Zeit T zu erzeugen, ſo daß an A

für R allein die Kraft $\frac{R.Rr^2.K}{2g.AB.T}$

für P allein die Kraft $\frac{P.Pp^2.K}{2g.AB.T}$

für Q allein die Kraft $\frac{Q.Qq^2.K}{2g.AB.T}$

für S allein die Kraft $\frac{S.Ss^2.K}{2g.AB.T}$

nöthig wäre (204. §.); ſo groß nämlich müßten die an A nach der auf AB ſenkrechten Richtung anzubringenden Kräfte

ſeyn,

seyn; wenn die Masse R, oder P, oder Q, oder S allein da wäre, und in jedem Fall der Punct A die bestimmte Winkelgeschwindigkeit K binnen der Zeit T erlangen müßte; größere Kräfte, oder kleinere, würden eine größere oder kleinere Winkelgeschwindigkeit binnen derselben Zeit erzeugen (202. §.). Wenn also alle diese Kräfte am Puncte A nach einer auf AB senkrechten Richtung AU angebracht wären; so würden auch jetzt alle Puncte R, P, Q, S, A mit einerley Winkelgeschwindigkeit um MN sich drehen, welche = K am Ende der Zeit T seyn würde, und eine Kraft, welche größer oder kleiner wäre, als die Summe jener Kräfte, würde auch eine andere Winkelgeschwindigkeit binnen der Zeit T erzeugen. Daher, weil die gegebene Kraft U dieselbe Winkelgeschwindigkeit erzeugen soll, ist

$$U = \frac{R.Rr^2.K}{2g.AB.T} + \frac{P.Pp^2.K}{2g.AB.T} + \frac{Q.Qq^2.K}{2g.AB.T} + \frac{S.Ss^2.K}{2g.AB.T},$$

mithin die Winkelgeschwindigkeit

$$K = \frac{2g.AB.U.T}{R.Rr^2+P.Pp^2+Q.Qq^2+S.Ss^2}.$$

206. §.

Zusatz. Stellt man sich vor, daß alle Massen R, P, Q, S wegbleiben, und eine einzige Masse M am Puncte A angebracht wird; so wird die darauf wirkende Kraft U die Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2gU}{M.AB} T$ binnen der Zeit T erlan-

erlangen (206. §.), und diese wird der im (205. §.) nur alsdann gleich seyn, wenn

$$M.AB^2 = R.Rr^2 + P.Pp^2 + Q.Qq^2 + S.Ss^2 \text{ ist.}$$

207. §.

Erklärung. Das Product aus jeder Masse, wenn sie in einem Puncte beysammen betrachtet wird, in das Quadrat der Entfernung derselben von einer Axe, um die sie herumgedreht wird, heißt das Moment derselben Masse, oder ihr Moment der Trägheit: und das Moment der Trägheit jeder wie immer großen um eine feste Axe beweglichen Masse wird durch die Summe der Momente der Trägheit aller an ihr denkbaren materiellen Puncte in Ansehung derselben Axe, mithin durch die Summe der Producte aus allen materiellen an der gegebenen Masse denkbaren Puncten, in die Quadrate ihrer Entfernungen von der Umdrehungsaxe bestimmt.

208. §.

1. Zusatz. Das Moment der Trägheit jeder aus mehrern Theilen zusammengesetzten Masse in Ansehung einer gegebenen Umdrehungsaxe ist der Summe der Momente der Trägheit aller einzeln genommenen Theile in Ansehung derselben Axe gleich (207. §.).

209. §.

2. Zusatz. Bestehet eine Masse M aus zweenen Theilen P, Q; so ist das Moment der Trägheit des einen Theils P in Ansehung einer gegebenen Umdrehungsaxe so groß als die Differenz des Momentes des andern Theils Q vom

Momente

Momente der ganzen Maſſe M in Anſehung derſelben Umdrehungsaxe (208. §.).

210. §.

12. Fig. 3. Zuſatz. Seyen R, T zweene materielle Puncte einer Maſſe ABC (12. Fig.); G ſey ihr Schwerpunct; ZX eine Axe durch G, und UV zu ZX parallel: aus R, T fallen auf die Ebene, in welcher die Axen ZX, UV liegen mögen, die ſenkrechten Linien Rr, Tt; ſo wird tg und rg ſenkrecht auf UV ſowohl als auf ZX ſeyn, denkt man ſich nun die Linien TG, Tg, RG, Rg, durch welche die ſenkrechten Entfernungen der Puncte T, R von den Axen ZX, UV beſtimmt werden; ſo ſind $T.TG^2$, $T.Tg^2$, $R.RG^2$, $R.Rg^2$ die Momente der Trägheit der materiellen Puncte T, R in Anſehung der Axen ZX, UV (207. §.); Gg iſt die Entfernung des Schwerpuncts von der Axe UV, und rG, tG ſind die Entfernungen der Puncte R, T von einer durch ZX auf der Ebene ZXVU ſenkrecht ſtehenden Ebene der Schwere von ABC, mithin ſind $R.rG$, $T.tG$ die ſtatiſchen Momente der Puncte R, T in Anſehung derſelben Ebene. Dafür iſt aber

$$R.Rg^2 = R(RG^2 - rG^2 + rg^2)$$
$$= R.RG^2 + R.Gg^2 - 2.R.rG.Gg.$$
$$T.Tg^2 = T(TG^2 - tG^2 + tg^2)$$
$$= T.TG^2 + T.Gg^2 + 2.T.tG.Gg.$$

211. §.

11. Fig. 4. Zuſatz. Wenn eine Maſſe m am Puncte β (11. Fig.) beſtändig in der Entfernung βa von der Umdrehungsaxe MN von einer unveränderlichen auf den Punct A, der in

einem

einem Kreiſe um MN beweglichen und auf MN ſenkrechten Linie AB beſtändig nach der Richtung der Tangente deſſelben Kreiſes wirkenden Kraft U um MN bewegt wird; ſo erlanget der Punct A binnen jeder Zeit T eine ſolche Winkelgeſchwindigkeit, welche er erlangen würde, wenn an β keine, an A aber eine Maſſe $M = \frac{m.\alpha\beta^2}{AB^2}$ vorhanden wäre (203. §.), wobey $m.\alpha\beta^2$ das Moment der Trägheit der Maſſe m an β in Anſehung der Umdrehungsaxe MN iſt (207. §.).

212. §.

5. Zuſatz. Wenn ein feſter Körper ABC (12. Fig.) in einer beſtimmten Entfernung von der gegebenen Axe UV von irgend einer unveränderlichen an einem damit verbundenen Puncte l angebrachten Kraft um MN bewegt wird; ſo geſchieht die Umdrehung deſſelben um die Axe MN nicht anders, als wenn ſeine Beſtandtheilchen ſich an Endpuncten der ſenkrechten Linien befänden, die man aus ihnen auf die Axe MN in Gedanken kann fallen laſſen: die Winkelgeſchwindigkeit des Puncts l wird alſo am Ende jeder Zeit T derjenigen gleich ſeyn, welche dieſelbe Kraft erzeugen würde, wenn ſtatt des Körpers ABC eine einzige Maſſe M, ſo groß als die Summe der Producte aus allen denkbaren materiellen Beſtandtheilchen des Körpers ABC in die Quadrate ihrer Entfernungen von der Umdrehungsaxe UV durch das Quadrat der Entfernung lg des Puncts l dividirt, ſich befände (206. §.), wobey jene Summe das Moment der Trägheit des ganzen Körpers ABC in Anſehung der Umdrehungsaxe UV geben würde (207. §.). 12. Fig.

213. §.

6. Zusatz. Die bewegende Kraft U, von welcher eine Masse Q um eine feste Axe bewegt wird, mag auf was immer für einen Punct in der Entfernung E von derselben Axe unmittelbar wirken; so läßt sich, wenn μ das Moment der Trägheit der Masse Q in Ansehung jener Axe gegeben ist, allemal die Masse $\frac{\mu}{E^2}$ bestimmen, welche man, statt der Masse Q, an dem Puncte, worauf die Kraft unmittelbar wirkt, denken kann, ohne dadurch die Winkelgeschwindigkeit zu ändern (211. 212. §.): eine solche Masse $\frac{\mu}{E^2}$ kann die der Masse Q zugehörige gleichgültige Masse heißen.

214. §.

12. Fig. 7. Zusatz. Das Moment der Trägheit eines festen Körpers ABC (12. Fig.) in Ansehung der gegebenen Umdrehungsaxe UV sey μ, und m die Masse selbst. Will man sich die ganze Masse m in einem Puncte beysammen, in einer solchen Entfernung x von der Umdrehungsaxe UV denken, wobey das Moment der Trägheit von m, dem Moment μ gleich sey; so muß man sich bey x eine solche gerade Linie denken, für welche $m.x^2 = \mu$ seyn mag (207. §.), woraus denn $x^2 = \frac{\mu}{m}$ folgt. Aus diesem Grunde pflegt man das Moment der Trägheit eines jeden Körpers ABC in Ansehung einer Umdrehungsaxe UV, wenn seine Masse M ist, mit $Mkk = Mk^2$ zu bezeichnen, wobey k die gerade Linie bedeutet, mit deren Quadrat die Masse M multiplicirt, jenes Moment geben würde, und man

man weiß, daß man sie, für bekanntes Moment finden würde, wenn man dieses durch die Masse M selbst dividirte.

215. §.

Aufgabe. Das Moment der Trägheit μ einer körperlichen Masse $m = ABC$ (12. Fig.) in Ansehung einer durch ihren Schwerpunct G laufenden Axe ZX ist gegeben; eine andere Axe UV ist in einer bestimmten Entfernung zu jener parallel: man soll das Moment der Trägheit derselben Masse in Ansehung der Axe UV bestimmen. 12. Fig.

Auflösung. Man addire zum Momente μ der Trägheit der Masse $m = ABC$ in Ansehung der Axe ZX das Product $m.Gg^2$ aus der Masse selbst in das Quadrat der Entfernung ihres Schwerpuncts von der neuen Axe UV; so wird die Summe das verlangte Moment der Trägheit derselben Masse in Ansehung der Axe UV seyn.

Beweis. 1. Man bilde sich eine durch den Schwerpunct G gehende Ebene ZX ein, welche auf der Ebene ZXVU, worauf die Axen liegen, senkrecht stehe; so theilt sie die ganze Masse in zweene Theile ABX, ACX, und sie ist eigentlich eine Ebene der Schwere.

2. Daher ist das statische Moment von ABX, dem statischen Momente von ACX in Ansehung der Ebene ZX, oder die Summe der Producte aus allen in ABX denkbaren materiellen Theilchen in ihre Entfernungen von der Ebene ZX der Summe der Producte aus allen in ACX denkbaren materiellen Theilchen in ihre Entfernungen von der Ebene ZX gleich.

3. Das Product aus der ganzen Masse ABX (1) in das Quadrat der Entfernung des Schwerpuncts G von der Axe UV sey $ABX.Gg^2$; und das aus der Masse ACX (1) sey $ACX.Gg^2$; die Summe der Producte aus allen materiellen Theilchen von ABX in ihre Entfernungen von der Ebene ZX sey P, und die Summe der Producte aus allen Theilchen von ACX in ihre Entfernungen von der Ebene ZX sey Q: so ist, wegen (207. 210. §.), wenn z, y die Momente der Trägheit von ABX und ACX in Ansehung der Axe UV sind, und α, β die Momente davon in Ansehung der Axe ZX bedeuten:

$$z = \alpha + ABX.Gg^2 - 2P.Gg.$$
$$y = \beta + ACX.Gg^2 + 2Q.Gg.$$

Da also $\alpha + \beta = \mu$ das Moment der ganzen Masse ABC = m in Ansehung der Axe ZX, und z + y das Moment davon in Ansehung der Axe UV ist (208. §.), ferner P = Q nach (2); so ist das verlangte Moment $z + y = \alpha + \beta + ABX.Gg^2 + ACX.Gg^2 - 2P.Gg + 2Q.Gg = \mu + (ABX + ACX)Gg^2 = \mu + m.Gg^2$.

216. §.

1. Zusatz. Das Product aus jeder Masse ABC in das Quadrat der Entfernung ihres Schwerpuncts G von einer gegebenen Umdrehungsaxe UV vom Momente ihrer Trägheit in Ansehung derselben Axe abgezogen, giebt das Moment der Trägheit der Masse ABC in Ansehung der durch ihren Schwerpunct G gehenden zur vorigen UV parallelen Axe ZX (215. §.).

217. §.

2. Zusatz. Seyen UV, uv zweene einander und der durch den Schwerpunct G laufenden Axe ZX parallele Axen; d, D seyen die Entfernungen des Schwerpuncts G von uv, UV, nämlich $d = Gk$, $D = Gg$; μ sey das Moment der Trägheit der Masse $ABC = m$ in Ansehung der Axe ZX; und P, Q seyen die Momente der Trägheit der Masse $m = ABC$ in Ansehung der Axen uv, UV; so ist $P = \mu + md^2$ und $Q = \mu + mD^2$ (215. §.). Also ist $P = Q - m(D^2 - d^2)$, und $Q = P + m(D^2 - d^2)$: das heißt: Wann man vom Momente der Trägheit der Masse ABC in Ansehung der Axe UV das Product aus ihr in die Differenz der Quadrate der Entfernungen ihres Schwerpuncts G von der Axe UV und einer andern parallelen uv abziehet; so giebt der Rest das Moment der Trägheit der Masse ABC in Ansehung der Axe uv: wird aber dasselbe Product zu diesem Momente addirt; so giebt die Summe das Moment der Trägheit der Masse ABC in Ansehung der Axe UV.

218. §.

3. Zusatz. Wenn die Momente der Trägheit P, Q zweener Theile ADC, ABC (13. Fig.) einer Masse ABCDA in Ansehung der durch ihre Schwerpuncte g, G laufenden parallelen Axen MN, PQ bekannt sind; so kann man dadurch das Moment der Trägheit X der ganzen Masse ABCDA in Ansehung einer dritten zu den vorigen parallelen Axe zy, oder uv bestimmen. Denn wenn Gb, $G\beta$, ga, $g\alpha$ die senkrechten Entfernungen der Schwerpunkte G, g von 13. Fig.

den Axen zy, uv sind; so ist nach (215. 208. §.) das Moment der Trägheit der ganzen Masse ABCD,

In Ansehung der Umdrehungsaxe zy

$$X = P + Q + ADC.ga^2 + ABC.Gb^2;$$

und in Ansehung der Axe uv

$$X = P + Q + ADC.g\alpha^2 + ABC.G\beta^2.$$

219. §.

14. Fig. **Aufgabe.** Das Moment der Trägheit eines geraden Cylinders in Ansehung seiner Axe zu finden.

Auflösung. 1. Man denke sich einen Cylinder auf der Grundfläche ABD (14. Fig.), der sich um seine darauf in C senkrechte Axe drehen soll. Die Axe selbst, wodurch zugleich des Cylinders Höhe bestimmt wird, sey a; der Halbmesser der Grundfläche CA = R, und 1 : π das Verhältniß des Halbmessers zur halben Peripherie; so ist πR^2 der Quadratinhalt der Grundfläche, und πaR^2 der Cubikinhalt, oder die Masse des ganzen Cylinders.

2. Ein Stück des Halbmessers sey Ca = x, welches um ab = Δx wachsen mag; so ist das Moment der Trägheit μ des Cylinders auf der Grundfläche gha eine Function von x, welche um Δμ das Moment der Trägheit der cylindrischen Röhre zugenommen hat, die man sich auf der Grundfläche ghabef denken kann, so daß sie einerley Höhe a mit dem ganzen Cylinder in (1) habe.

3. Da nun alle zwischen den beyden Oberflächen agh, ebf der cylindrischen Röhre in (2) enthaltene materielle Bestandtheilchen gewiß in größeren Entfernungen von der

Axe

Axe a in C liegen, als der Halbmesser $Ca=x$ ist, und in kleineren als der Halbmesser $Cb=x+\Delta x$ ist; so erhellet aus (207. §.), daß das Moment der Trägheit $\Delta\mu$ derselben cylindrischen Röhre gewiß größer ist, als das Product aus der ganzen Masse der Röhre in das Quadrat des Halbmessers x, und kleiner, als das Product aus ihr in das Quadrat des Halbmessers $x+\Delta x$.

4. Es ist aber πx^2 der Quadratinhalt des Kreises gha, und $\pi(x+\Delta x)^2=\pi x^2+\pi(2x+\Delta x)\Delta x$ der des Kreises ebf; daher ist $\pi(2x+\Delta x)\Delta x$ der Quadratinhalt der Krone aghfeb als der Grundfläche der Röhre; folglich ist $a\pi(2x+\Delta x)\Delta x$ der Cubikinhalt, oder die ganze Masse der Röhre. Wegen (3) ist also für jede wie immer kleine Differenz Δx

$$\Delta\mu > a\pi(2x+\Delta x)\Delta x.x^2;$$
$$\Delta\mu < a\pi(2x+\Delta x)\Delta x(x+\Delta x)^2.$$

Daher auch

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} > 2a\pi x^3+a\pi x^2\Delta x.$$
$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} < 2a\pi x^3+5a\pi x^2\Delta x+4a\pi x\Delta x^2+a\pi\Delta x^3.$$

Der Exponent des Differentialverhältnisses des Moments der Trägheit μ des auf der unbestimmten Grundfläche gah stehenden Cylinders ist also nach (69. §.) $d\mu=2a\pi x^3dx$, und daraus erhält man $\mu=\frac{2}{4}a\pi x^4+Const$: weil aber für $Ca=x=0$ gewiß auch $\mu=0$ seyn muß; so ist $Const=0$ (II. Band. 28. §.), folglich $\mu=\frac{1}{2}a\pi x^4$ das Moment des Cylinders auf der Grundfläche gah. Setzt

man $x = CA = R$; so findet man daraus das Moment der Trägheit des auf der Grundfläche ABD stehenden Cylinders $\mu = \frac{1}{2} a\pi R^4 = \frac{1}{2} a\pi R^2 . R^2 = \frac{1}{2} PR^2$, wenn P des Cylinders Masse bedeutet (1).

220. §.

Zusatz. Hieraus (219. §.) nach (209. §.) findet man das Moment der Trägheit eines hohlen Cylinders auf der Grundfläche agbDBA, wenn die Halbmesser $CA = R$, $Ca = r$, nebst des Cylinders Axe a bekannt sind: denn wenn der ganze Cylinder voll wäre; so wäre sein Moment der Trägheit $= \frac{1}{2} a\pi R^4$; daher weil zur Ausfüllung desselben ein Cylinder auf der Grundfläche agb erfordert wird, dessen Moment ist $\frac{1}{2} a\pi r^4$; so ist des hohlen Cylinders Moment $= \frac{1}{2} a\pi R^4 - \frac{1}{2} a\pi r^4 = \frac{1}{2} a\pi (R^2 - r^2)(R^2 + r^2)$ $= \frac{1}{2} P(R^2 + r^2)$, wenn P die Masse des hohlen Cylinders bedeutet.

221. §.

15. Fig. **Aufgabe.** Das Moment der Trägheit einer Kugel ADBE (15. Fig.) in Ansehung ihres Durchmessers AB zu bestimmen.

Auflösung. 1. der Durchmesser sey $AB = 2r$; so ist, für das Verhältniß $1 : \pi$ des Halbmessers zur halben Peripherie, der Cubikinhalt oder die Masse der ganzen Kugel $\frac{4}{3} \pi r^3$.

2. Ein unbestimmtes Stück des Durchmessers sey $AP = x$, und durch P denke man sich den kreisförmigen auf den Durchmesser AB senkrecht stehenden Durchschnitt ah, dessen Halbmesser ist $aP = \sqrt{(2rx - x^2)}$.

3. Bey

3. Bey dieser Voraussetzung ist aAh ein unbestimmter von AP = x abhängiger Kugelabschnitt, dessen Moment der Trägheit μ in Ansehung des Durchmessers AB gewiß eine Function von x ist: wächst x = AP um die Differenz Pp = Δx; so übergeht, für den zu ab parallelen Durchschnitt df, der Kugelabschnitt aAh in den Abschnitt dAf, der Abschnitt aAh wächst um das zwischen den Durchschnitten ab, df enthaltene Kugelstück dahf, und das Moment der Trägheit μ des Abschnittes aAh wächst um das Moment der Trägheit des Kugelstückes dahf, welches demnach = $\Delta\mu$ ist.

4. Nun aber ist einleuchtend, daß wenn man sich auf der Grundfläche ah den Cylinder abgh, und auf der Grundfläche df den Cylinder cdfe vorstellt, das Moment der Trägheit $\Delta\mu$ des Kugelstücks adfh in Ansehung des Durchmessers AB größer ist, als das Moment der Trägheit des Cylinders cdfe, und zugleich kleiner als das des Cylinders abgh in Ansehung desselben Durchmessers: da also $\sqrt{(2rx - x^2)}$ in (2), und $\sqrt{(2r(x+\Delta x) - (x+\Delta x)^2)}$ die Halbmesser der Durchschnitte ah, df sind; so hat man wegen (219. §.)

$$\Delta\mu > \tfrac{1}{2}\pi(2r(x+\Delta x) - (x+\Delta x)^2)^2\Delta x,$$
$$\Delta\mu < \tfrac{1}{2}\pi(2rx - x^2)^2\Delta x.$$

Also auch

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} > \begin{matrix}\tfrac{1}{2}\pi(2rx-x^2)^2 + \tfrac{1}{2}\pi(2(r-x)\Delta x - \Delta x^2)^2 \\ +\pi(2rx-x^2)(2(r-x)\Delta x - \Delta x^2)\end{matrix}$$
$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} < \tfrac{1}{2}\pi(2rx - x^2)^2.$$

Nach (69. §.) erhält man hieraus

$$d\mu = \tfrac{1}{2}\pi(2rx - x^2)^2 dx,$$

Integrirt man diese Formul, und setzt man $x = AB = 2r$; so erhält man das Moment der ganzen Kugel $\mu = \frac{8}{15}\pi r^5 = \frac{2}{5}Pr^2$, wobey P die Masse der ganzen Kugel bedeutet (1).

322. §.

16. Fig. **Aufgabe.** Das Moment der Trägheit eines rechtwinklichten Parallelograms ABCD (16. Fig.) bey der Voraussetzung zu bestimmen, daß dasselbe mit der zwischen den aus seinen Eckpuncten D, A auf die Umdrehungsaxe MN herabgelassenen einander gleichen Senkstrichen $Dd = Aa$ eingeschlossenen Ebene DdaA unter einem rechten Winkel CDd verbunden ist.

Auflösung. Für $DP = x$, und $PQ = \Delta x$, wenn man die Parallelen Pp, Qq zu DA ziehet, ist DApP ein unbestimmtes Stück des ganzen Parallelograms, und PpqQ ist seine Differenz: das Moment der Trägheit μ von PpAD in Ansehung der Axe MN ist eine Function von $x = DP$, und ihre Differenz $\Delta\mu$ ist das Moment von QPpq. Da nun alle zwischen Qq und Pp enthaltenen Bestandtheilchen der Masse QqpP in einer größeren Entfernung von der Umdrehungsaxe MN liegen, als Pd ist, und zugleich in einer kleineren Entfernung, als Qd ist; so erhellet aus (207. §.), daß das Moment der Trägheit $\Delta\mu$ von PpqQ größer seyn muß, als das Product aus der ganzen Masse $PpqQ = DA \cdot QP$ in $Pd^2 = PD^2 + Dd^2$, und zugleich kleiner, als das Product aus ihr in $Qd^2 = QD^2 + Dd^2$. Für jede wie immer kleine Differenz ist demnach

$\Delta\mu$

$\Delta\mu > DA.\Delta x(x^2+Dd^2)$;

$\Delta\mu < DA.\Delta x((x+\Delta x)^2+Dd^2)$.

Daher auch

$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} > DA(x^2+Dd^2)$;

$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} < DA(x^2+Dd^2)+2DA.x\Delta x+DA\Delta x^2$.

Nach (69. §.) iſt alſo

$d\mu = DA(x^2+Dd^2)dx$.

Das Integral hievon iſt $\mu = DA(\frac{1}{3}x^3+x.Dd^2)$; ſetzt man daher $x = DI = DC$; ſo erhält man des ganzen Parallelogramms ABCD Moment der Trägheit $= DA(\frac{1}{3}DC^3 + DC.Dd^2) = \frac{1}{3}DA.DC^3 + DA.DC.Dd^2$.

223. §.

Aufgabe. Ein rechtwinklichtes gerades Priſma ABEFCDAHG wird um die mit ſeiner Eckſeite EF zuſammenfallende feſte Axe MN bewegt; man ſoll das Moment der Trägheit deſſelben in Anſehung dieſer Axe beſtimmen. 17. 18.

Auflöſung. 1. Sey $CF = h$, $CB = b$, $CD = l$. Man nehme $Fa = x$, und denke ſich den zu ABCD parallelen Durchſchnitt afhd; ſo iſt das Moment der Trägheit μ von afhdGHEF in Anſehung der Axe MN eine Function von $x = Fa$, welche, wenn $x = Fa$ um $ab = \Delta x$ wächſt, um die Differenz $\Delta\mu$, dem Momente der Trägheit der zwiſchen den zu ABCD parallelen Durchſchnitten afhd, bgc enthaltenen Maſſe gleich, zunimmt. Nun ſind die Beſtandtheilchen dieſer Maſſe dergeſtalt vertheilt, daß, wenn man

Integrirt man diese Formul, und setzt man $x = AB = 2r$; so erhält man das Moment der ganzen Kugel $\mu = \frac{8}{15}\pi r^5 = \frac{2}{5}Pr^2$, wobey P die Masse der ganzen Kugel bedeutet (1).

222. §.

16. Fig. **Aufgabe.** Das Moment der Trägheit eines rechtwinklichten Parallelograms ABCD (16. Fig.) bey der Voraussetzung zu bestimmen, daß dasselbe mit der zwischen den aus seinen Eckpuncten D, A auf die Umdrehungsaxe MN herabgelassenen einander gleichen Senkstrichen $Dd = Aa$ eingeschlossenen Ebene DdaA unter einem rechten Winkel CDd verbunden ist.

Auflösung. Für $DP = x$, und $PQ = \Delta x$, wenn man die Parallelen Pp, Qq zu DA ziehet, ist DApP ein unbestimmtes Stück des ganzen Parallelograms, und PpqQ ist seine Differenz: das Moment der Trägheit μ von PpAD in Ansehung der Axe MN ist eine Function von $x = DP$, und ihre Differenz $\Delta\mu$ ist das Moment von QPpq. Da nun alle zwischen Qq und Pp enthaltenen Bestandtheilchen der Masse QqpP in einer größeren Entfernung von der Umdrehungsaxe MN liegen, als Pd ist, und zugleich in einer kleineren Entfernung, als Qd ist; so erhellet aus (207. §.), daß das Moment der Trägheit $\Delta\mu$ von PpqQ größer seyn muß, als das Product aus der ganzen Masse $PpqQ = DA \cdot QP$ in $Pd^2 = PD^2 + Dd^2$, und zugleich kleiner, als das Product aus ihr in $Qd^2 = QD^2 + Dd^2$. Für jede wie immer kleine Differenz ist demnach

$\Delta\mu$

Nach (69. §.) folgt hieraus

$d\mu = bl(\frac{1}{3}l^2 + x^2)\,dx$, und nun

$\mu = bl(\frac{1}{3}l^2 . x + \frac{1}{3}x^3)$.

Setzt man $x = Fa = FC = h$; so erhält man des ganzen Prisma BG Moment $= bl(\frac{1}{3}hl^2 + \frac{1}{3}h^3) = \frac{1}{3}bhl(l^2+h^2) = \frac{1}{3}P(l^2+h^2)$, für die Masse P desselben.

224. §.

Von der Berechnung des Moments der Trägheit derjenigen Körper, welche beym Maschinenbau am häufigsten vorkommen, habe ich in einem im Jahr 1789 herausgegebenen Versuch eines Beytrags zur allgemeinen Theorie von der Bewegung und vortheilhaftesten Einrichtung der Maschinen, ausführlich gehandelt: nun kann man die Sprache, deren ich mich daselbst bedient habe, nach der hier entworfenen Theorie leicht berichtigen. Ich will noch zeigen, wie sich die vorhergehenden Untersuchungen auf den Fall veränderlicher Kräfte anwenden lassen, überhaupt, und insbesondere beym einfachen und zusammengesetzten Pendul.

225. §.

Aufgabe. Die Axe ist bestimmt, um welche eine Masse P, deren Lage gegen jene Axe ebenfalls bestimmt ist, dergestalt, daß sie während der Bewegung nicht geändert werden kann, sich herumbewegen läßt: diese Bewegung soll nun durch eine veränderliche Kraft U bewirkt werden, welche auf einen mit jener Masse in Verbindung stehenden Punct A, dessen senkrechte Entfernung von der gegebenen

Axe

Axe D seyn mag, beständig nach der Richtung der Tangente desjenigen Kreises wirken soll, welchen der Punct A während der Bewegung um jene Axe durchläuft. Man sucht die wahre und Winkel-Geschwindigkeit des Puncts A.

Auflösung. 1. Das Moment der Trägheit der Masse P in Ansehung der gegebenen Bewegungsaxe sey Pk^2 (214. §.). Wirkte nun auf den Punct A was immer für eine unveränderliche Kraft W; so würde die Winkelgeschwindigkeit des Puncts A dieselbe bleiben, wenn man sich, statt jener Masse P, die gleichgültige $= \frac{Pk^2}{D^2}$ am Puncte A dächte (213. §.): also wäre am Ende jeder Zeit t die Winkelgeschwindigkeit desselben Puncts

$$= \frac{2gW}{\frac{P.k^2}{D^2}.D}.t = \frac{2gDW}{Pk^2}t \text{ (200. §.).}$$

2. Nun kann man, wegen (194. §.), vollkommen wie in (189. §.) schließen. Auf den Punct A soll nämlich eine veränderliche Kraft U wirken: gesetzt, binnen der Zeit T sey dieselbe in V übergegangen, und eine Winkelgeschwindigkeit γ erzeugt, welche binnen einem darauf folgenden Zeittheilchen ΔT um $\Delta\gamma$ zunehmen mag. Ist die Kraft U abnehmend; so muß sie binnen der Zeit ΔT um ΔV abnehmen, mithin $= V - \Delta V$ am Ende der Zeit ΔT seyn: die, binnen der Zeit ΔT wirklich erzeugte Winkelgeschwindigkeit $\Delta\gamma$ ist also größer, als die, welche binnen derselben Zeit eine unveränderliche Kraft $= V - \Delta V$ erzeugen würde,

und

und zugleich kleiner, als welche eine unveränderliche Kraft $=V$ erzeugen müßte. Also ist nach (1)

$$\Delta\gamma > \frac{2gD}{Pk^2}(V-\Delta V)\Delta T;\ \Delta\gamma < \frac{2gD}{Pk^2}V\Delta T.$$

Für eine zunehmende Kraft U, welche binnen der Zeit T in V übergehen soll, fände man

$$\Delta\gamma < \frac{2gD}{Pk^2}(V+\Delta V)\Delta T;\ \Delta\gamma > \frac{2gD}{Pk^2}V\Delta T.$$

Da also die Kraft V als eine Function von T kann betrachtet werden, deren Differenz sich durch $\Delta V = \alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \text{etc.}$ ausdrücken läßt (59. §.); so hat man für jede wie immer kleine Differenz der Zeit T

$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta T} > \frac{2gD}{Pk^2}V - \frac{2gD}{Pk^2}(\alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \text{etc.}),$$

$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta T} < \frac{2gDV}{Pk^2}.$$

Oder

$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta T} < \frac{2gD}{Pk^2}V + \frac{2gD}{Pk^2}(\alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \text{etc.})$$

$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta T} > \frac{2gD}{Pk^2}V.$$

In beyden Fällen ist daher der Exponent des Differentialverhältnisses der binnen der Zeit T erzeugten Winkelgeschwindigkeit γ nach (69. §.)

$$d\gamma = \frac{2gD}{Pk^2}V\,dT.$$

Und

Und wenn man nun annimmt, C sey die wahre Geschwindigkeit des Puncts A am Ende der Zeit T; so ist $C = \gamma . D$ (199. §.), daher $dC = Dd\gamma$, oder

$$dC = \frac{2gD^2}{Pk^2} V dT.$$

226. §.

Zusatz. In (225. §. Auflös. n. 1.) war $\frac{Pk^2}{D^2}$ die gleichgültige Masse; setzt man sie $= M$; so ist in (125. §.) $dC = \frac{2gV}{M} dT$. Eine veränderliche Kraft mag daher was immer für eine Masse P um eine gegebene Axe zu bewegen haben; so wird sie die Bewegung des Puncts A, auf den sie unmittelbar wirkt, eben so beschleunigen, als wenn sie nach geradlinichter Richtung eine Masse M zu bewegen hätte (189. §.), welche am Puncte A der Masse P gleichgültig ist (213. §.).

227. §.

Auf dieser Formul (226. §.) beruhet jede vollkommene Theorie, welche zur Beurtheilung der Bewegung einer Maschine dienen sollte: bey der Anwendung auf die in der Natur wirklich vorhandenen Kräfte stehen aber so viele und so große Hindernisse im Wege, daß fast keine Hoffnung ist, sie auf irgend eine Art zu übersteigen. Soll eine Maschine von was immer für einer veränderlichen Kraft in Bewegung gesetzt und unterhalten werden, welche vom ersten Augenblicke der Bewegung an, binnen einer Zeit T die Größe V erlangen mag; so entsteht die wichtige Frage, wie groß ist die Geschwindigkeit C, welche der Punct, worauf die Kraft

unmit-

unmittelbar wirkt, in der Zeit T erlangen muß? Nimmt man an, F bedeute diejenige Kraft, welche an demselben Puncte zum Gleichgewichte mit dem gesammten, bey der zu bewegenden Maschine vorhandenen Widerstand erfordert wird, und M sey die an eben dem Puncte allen zu bewegenden Massen zusammengenommen zugehörige gleichgültige Masse, in der Bedeutung (213. §.): so ist $dC = \frac{2g(V-F)dT}{M}$. Bey der Bestimmung der Geschwindigkeit C kömmt also alles darauf an, daß man F und M genau genug zu berechnen im Stande sey, und die Gesetze kenne, nach welchen die bewegenden, und vielleicht auch die widerstehenden, Kräfte sich während der Bewegung ändern.

228. §.

Aufgabe. Eine gerade um ihren festen Endpunct C bewegliche unbiegsame Linie AC (18. Fig.) wird von einer auf A beständig nach verticaler Richtung unterwärts wirkenden unveränderlichen Kraft P getrieben; am Puncte A aber befindet sich eine, bloß träge, Masse M; man soll die Bewegung des andern Endpuncts A bestimmen, wenn der Winkel $ACE = \varphi$, welchen die Linie AC mit der verticalen Linie EC im Anfange der Bewegung einschließt, bekannt ist. 18. Fig.

Auflösung. 1. Man nehme an, die Linie AC sey binnen einer Zeit t um den Winkel $ACD = \alpha$ vorgerückt, und setze $DCE = \varphi - \alpha = \beta$; so giebt der Bogen $AD = \mu$ den Weg, welchen der Punct A in der Zeit t zurückgelegt

hat, und c sey die Geschwindigkeit, welche er binnen derselben Zeit erlangen mag.

2. Die Linie selbst sey AC = a: da nun durch φ, α, β, in (1) drey aus C mit dem Halbmesser = 1 zwischen den Schenkeln AC und CE, AC und CD, DC und CE beschriebene Kreisbogen können verstanden werden (198. §.); so ist in (1) $\mu : \alpha = a : 1$, daher $\mu = a\alpha = a(\varphi - \beta)$.

3. Weil ferner CE vertical ist, wenn aus C der Bogen AEB beschrieben, und AP horizontal, daher auf CE senkrecht gezogen wird; so ist $CP = AC.\mathrm{Cof}ACE = a\,\mathrm{Cof}\varphi$ wegen (1)2). Demnach ist $PE = CE - CP = a - a\,\mathrm{Cof}\varphi = a(1 - \mathrm{Cof}\varphi) = a\,\mathrm{Sinv}\varphi$, und wir wollen setzen $PE = a\,\mathrm{Sinv}\varphi = b$.

4. Sobald nun die Linie AC in die Lage DC kömmt, wird der Punct D, vermöge der Voraussetzung, von der unveränderlichen Kraft P nach der zu CE parallelen, in sich verticalen, Richtung Db fortgetrieben: wenn man aber an D die auf DC senkrechte Tangente uv ziehet, sodann CD in a verlängert, und ba parallel zu uv, bc aber parallel zu Ca ziehet; so läßt sich die Kraft $P = Db$ in zwo Seitenkräfte $Da = P\,\mathrm{Cof}DCE$, und $Dc = P\,\mathrm{Sin}DCE = P\sin\beta$ zerlegen, worunter die erste vom Puncte C ganz aufgehoben wird, die zweyte aber den Punct D nach der auf DC senkrechten Richtung Dv zur Fortsetzung der Bewegung im Bogen DE antreibt.

5. Da also am Puncte D sich eine Masse M befinden soll; so erhält man aus (1) 4) nach (226. §.).

$$dc = \frac{2gP\sin\beta}{M}dt.$$

Es

Es ist aber $d\mu = cdt$ (171. §.) wegen (1);

daher $cdc = \frac{2gP\,Sin\,\beta}{M} d\mu$.

6. Nun war in (2) $\mu = a(\varphi - \beta)$; daher ist $d\mu = -ad\beta = \frac{ad\,Cos\beta}{Sin\beta}$ (77. §.): in (5) ist also auch

$$cdc = \frac{2gP.ad\,Cos\beta}{M}. \text{ Mithin}$$

$$\tfrac{1}{2}c^2 = \frac{2agP}{M} Cos\,\beta, \text{ und}$$

$$c^2 = \frac{4agP}{M} Cos\,\beta + C.$$

Die Constante C zu finden, erwäge man, daß im Anfange der Bewegung die Geschwindigkeit $c = o$ war, daß demnach für $\beta = DCE = ACE = \varphi$ gewiß $c = o$ seyn muß: also ist nach (II. Band. 28. §.)

$$\frac{4agP}{M} Cos\,\varphi + C = o;\ C = -\frac{4agP}{M} Cos\,\varphi:$$

Folglich $c^2 = \frac{4agP}{M}(Cos\,\beta - Cos\,\varphi)$, und

$$c = 2\sqrt{\frac{agP}{M}(Cos\,\beta - Cos\,\varphi)} = 2\sqrt{\frac{agP}{M}(Cos(\varphi - \omega) - Cos\,\varphi)}.$$

7. Will man nun auch die Zeit t in (1) bestimmen; so setze man nach (5) 6)

$$dt = \frac{d\mu}{c} = \frac{-ad\beta}{2\sqrt{\frac{agP}{M}(Cos\,\beta - Cos\,\varphi)}}.$$

8. Sey ferner $z = \mathrm{Sin\,v}\,\beta$, daher $\mathrm{Col}\beta = 1 - z$, und $\mathrm{Sin}\,\beta = \sqrt{(2z - z^2)}$; nach (II. Band. 22. §. 4. Zuſ.) aber $dz = d\,\mathrm{Sin\,v}\,\beta = \mathrm{Sin}\,\beta\,d\beta$, mithin $d\beta = \frac{dz}{\sqrt{(2z-z^2)}}$.

9. Aus (7) 8) erhält man demnach für die Zeit t

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{aM}{gP}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(\mathrm{Sin\,v}\,\varphi - z)}.\sqrt{(2z-z^2)}},$$

oder für $\mathrm{Sin\,v}\,\varphi = \frac{b}{a}$ in (3)

$$dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{aM}{gP}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(2-z)^{-\frac{1}{2}}.dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{b}{a} - z\right)}}.$$

10. Nach (I. Band. 76. §. 7. Zuſatz) findet man

$$(2-z)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1.z}{2^{\frac{3}{2}}.2} + \frac{1.3z^2}{2^{\frac{5}{2}}.2.4} + \frac{1.3.5z^3}{2^{\frac{7}{2}}.2.4.6} + \text{----}$$

$$+ \frac{1.3.5.\ldots.(2r-1)z^r}{2^{\frac{2r+1}{2}}.2.4.6.\ldots.2r}.$$ Für

$$K = \frac{1.3.5.\ldots.(2r-1)}{2.4.6.\ldots.2r}$$

erhält man daher für dt folgenden Ausdruck:

$$dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{aM}{gP}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{dz}{2^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{b}{a} - z\right)}}\right.$$

$$\left. + \frac{K}{2^{\frac{2r+1}{2}}} \cdot \frac{z^r.dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{b}{a} - z\right)}}\right),$$

wobey das zweyte Glied zwiſchen den Klammern eigentlich das unbeſtimmte rte Glied einer Reihe iſt, deren einzelne

Glieder

Glieder daraus entstehen würden, wenn man r = 1, r = 2, r = 3, u. s. f. nach und nach setzte. Die Zeit t selbst ist nun:

$$t = -\frac{1}{2}\left(\frac{aM}{gP}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\int\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}}\right.$$

$$\left.+\frac{K}{2^{\frac{2r+1}{2}}}\int\frac{z^{\frac{2r-1}{2}}dz}{\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}}\right).$$

11. Diese Integralien auf die unzweydeutigste Art zu bestimmen, setze man $u = \frac{2za}{b}$, daher $z = \frac{bu}{2a}$; $dz = \frac{b\,du}{2a}$ also:

$$\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}} = \frac{du}{\sqrt{(2u-u^2)}}.$$

Das Integral hievon ist demnach wegen (II. Band. 24. 22. §. 5. Zus.) $=$ Arc Sin vu $=$ Arc Sin v $\frac{2az}{b}$, nämlich

$$\int\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}} = \text{Arc Sin v}\frac{2az}{b}.$$

12. Durch dieses Integral erhält man ferner nach (II. Band. 41. §. 2. Zus. 1. Form.)

$$\int\frac{z^{\frac{2r-1}{2}}dz}{\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}} = -2\left(\frac{z^{\frac{2r-1}{2}}}{2r}+\frac{(2r-1)bz^{\frac{2r-3}{2}}}{2r(2r-2)a}\right.$$

$$\left.+\frac{(2r-1)(2r-3)b^2z^{\frac{2r-5}{2}}}{2r(2r-2)(2r-4)a^2}+\text{-------}\right.$$

$$+\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots\ldots 5.3\,b^{r-1}z^{\frac{r}{2}}}{2r(2r-2)----4.2\,a^{r-1}}\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}$$
$$+\frac{(2r-1)(2r-3)---3.1.b^r}{2r(2r-2)---4.2.a^r}\operatorname{ArcSin v}\frac{2az}{b}.$$

13. Durch (12) für den Werth von K in (10) findet man daher aus (10)

$$t=-\frac{1}{2}\left(\frac{aM}{gP}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{ArcSin v}\frac{2az}{b}-\frac{2K}{2^{\frac{2r+1}{2}}}\left(z^{\frac{2r-1}{2}}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{(2r-1)bz^{\frac{2r-3}{2}}}{2r(2r-2)a}\right.$$
$$+\frac{(2r-1)(2r-3)b^2z^{\frac{2r-5}{2}}}{2r(2r-2)(2r-4)a^2}+\text{-----}$$
$$\left.+\frac{(2r-1)(2r-3)---5.3b^{r-1}z^{\frac{1}{2}}}{2r(2r-2)---4.2a^{r-1}}\right)\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}$$
$$\left.+\frac{K^2}{2^{\frac{2r+1}{2}}}\cdot\frac{b^r}{a^r}\cdot\operatorname{ArcSin v}\frac{2az}{b}\right)+C.$$

Weil ferner im Puncte A der Anfang der Bewegung war, mithin $t=0$ für $DCE=ECA$, oder $\beta=\varphi$ seyn muß; so ist $t=0$ für $z=\operatorname{Sin v}\beta=\operatorname{Sin v}\varphi=\frac{b}{a}$ wegen (8) 3): da also dafür $\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}=0$, und $\operatorname{ArcSin v}\frac{2az}{b}=\operatorname{ArcSin v}2=\pi$ wird, wenn π die halbe Peripherie des mit dem Halbmesser $=1$ beschriebenen Kreises bedeutet; so ist nach (II. Band. 28. §.) die Constante

$$C=\frac{1}{2}\left(\frac{aM}{gl^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\pi\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{K^2}{2^{\frac{2r+1}{2}}}\cdot\frac{b^r}{a^r}\right).$$

14. Soll

14. Soll die Masse M im Bogen AE bis zur verticalen Linie CE fortgetrieben werden; so wird sie in E eine Geschwindigkeit c haben, welche man aus (6) für $\beta = DCE = o$, daher $Cos\beta - Cos\varphi = 1 - Cos\varphi = Sin v\varphi = \frac{b}{a}$ in (3) erhält: sie ist nämlich:

$$c = 2\sqrt{\frac{bgP}{M}} = 2\sqrt{\frac{agP}{M}}\, Sin v\varphi.$$

15. Und will man die Zeit wissen, binnen welcher dieselbe Masse den Bogen AE durchläuft; so muß man in (13) $z = Sin v\beta = Sin v DCE = Sin v o = o$ setzen, wofür entstehet

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{aM}{gP}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \pi\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{K^2}{2^{\frac{2r+1}{2}}} \cdot \frac{b^r}{a^r}\right),$$

oder $t = \frac{\pi}{2}\left(\frac{aM}{2gP}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{K^2 \cdot b^r}{(2a)^r}\right)$, oder (10)

$$t = \frac{\pi}{2}\left(\frac{aM}{2gP}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \left(\frac{1.3.5.\ldots.(2r-1)}{2.4.6.\ldots.2r}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^r\right),$$

oder auch wegen (3)

$$t = \frac{\pi}{2}\left(\frac{aM}{2gP}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1.3.5.\ldots.(2r-1)}{2.4.6.\ldots.2r}\right)^2 \cdot \left(\frac{Sin v\varphi}{2}\right)^r \ldots$$

Wobey das zweyte Glied eigentlich das rte Glied einer Reihe ist, deren einzelne Glieder man daraus für $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$, u. s. f. erhalten würde, wegen (10).

229. §.

Erklärung. Eine gerade unbiegsame Linie CE, an deren Endpuncte E sich ein schwerer Punct, dessen Gewicht und die ihm proportionale Masse wir P nennen wollen, befinden

Fig. 12.

finden mag, heißt ein einfaches Pendul, wenn sie am andern Endpuncte C dergestalt befestigt ist, daß sie sich um C frey bewegen läßt.

230. §.

1. Zusatz. Wird das Pendul frey in der verticalen Lage CE an C angehängt; so wird der Punct E vom Gewichte P unterwärts nach der verticalen Richtung CE gedrückt (229. §.): da also diesen ganzen Druck der feste Punct C aushält; so ist keine Kraft da, welche das Pendul EC um C bewegte. Das Pendul CE wird also ruhen, bis eine äußere Kraft diese Ruhe stört.

231. §.

2. Zusatz. Wird hingegen das Pendul CE von seiner verticalen Lage entfernt, etwa in die Lage CA unter einem Erhöhungswinkel $ACE = \varphi$ gebracht; so wird der Punct A des Pendels CA von seinem Gewichte P (229. §.) unterwärts nach verticaler, mithin zu CE paralleler Richtung gedrückt: das Pendul wird also sich um C bewegen müssen; sein Endpunct A wird in einer gewissen Zeit t durch einen Kreisbogen AD fallen, und in D, wenn man den Winkel $ACD = \alpha$ setzt, die Geschwindigkeit

$$c = 2\sqrt{ag(\mathrm{Cos}(\varphi - \alpha) - \mathrm{Cos}\varphi)}$$

erlangen (228. §. n. 6.). Je tiefer das Pendul gegen E fällt, desto größer ist der Winkel α, und desto kleiner der Winkel $\varphi - \alpha = DCE$, mithin desto größer $\mathrm{Cos}(\varphi - \alpha)$, folglich auch die Geschwindigkeit c desto größer: kömmt das Pendul in die verticale Lage CE; so ist $\alpha = ACD = ACE = \varphi$, mithin $\mathrm{Cos}(\varphi - \alpha) = \mathrm{Cos}\,o = 1$; und

die

die Geschwindigkeit $c = 2\sqrt{ag(1 - \text{Cof}\,\varphi)} = 2\sqrt{ag}\,\text{Sin v}\,\varphi = 2\sqrt{g}.\text{PE}$ (228. §. n. 3.). Mit dieser Geschwindigkeit wird das Pendul seine Bewegung um C, von der verticalen Lage CE an, auf der entgegengesetzten Seite EB fortsetzen; weil aber nun der Winkel $\alpha = \text{ACD}$ größer ist als φ; so wird zwar $\varphi - \alpha$ verneint, aber $\text{Cof}\,(\varphi - \alpha)$ bejaht, mithin die Geschwindigkeit c des Penduls, zwar noch immer möglich, aber nun kleiner seyn, als sie in E war, auch um desto kleiner, je größer der Winkel α ist, je weiter demnach das Pendul gegen B fortrückt. Kömmt das Pendul in CB, so daß $\alpha = \text{ACD}$ in $\alpha = \text{ACB} = 2\,\text{ACE} = 2\varphi$ übergehet; so ist seine Geschwindigkeit in B gleich Null nämlich $c = 2\sqrt{ag\,(\text{Cof}\,(\varphi - 2\varphi) - \text{Cof}\,\varphi)} = 2\sqrt{ag}\,(\text{Cof}\,(-\varphi) - \text{Cof}\,\varphi) = 2\sqrt{ag}\,(\text{Cof}\,\varphi - \text{Cof}\,\varphi) = o.$

232. §.

2. Zusatz. Wenn also ein einfaches Pendul (229. §.) unter was immer für einem Erhöhungswinkel ACE = φ von der verticalen Lage CE in CA aufgehoben, sodann frey gelassen wird; so muß dasselbe mit allmählich wachsender Geschwindigkeit bis zur verticalen Lage CE fallen, hernach mit abnehmender Geschwindigkeit auf der entgegengesetzten Seite durch einen Bogen EB = EA steigen; von da kehrt das Pendul durch denselben Bogen BEA auf gleiche Art in die vorige Lage CA zurück, das heißt: das Pendul muß sich um den Punct C unaufhörlich in einem Kreisbogen AEB, welchen die verticale Linie CE in E halbirt, schwingen, wenn nichts da ist, was diese Schwungbewegung störte, und zwar so, daß die Geschwindigkeit des an ihm hängenden

schweren Punctes (229. §.), so oft er in E sich befindet, derjenigen Geschwindigkeit $2\sqrt{g.PE}$ gleich ist, welche derselbe Punct beym freyen Fall durch die Höhe PE erlangen würde (231. 178. 177. §.).

233. §.

4. Zusatz. Für den bekannten Erhöhungswinkel $\varphi = ACE$, und $PE = b = a \operatorname{Sin} v \varphi$, wobey $a = CA$ die Länge des Pendels bedeutet, findet man die Zeit t des halben Schwunges im Bogen AE aus (228. §. n. 15.), wenn man, wegen (229. §.), $P = M$ setzt: und wenn man dieselbe Zeit mit 2 multiplicirt; so erhält man die Zeit t des ganzen Schwunges im Bogen AEB (232. §.), nämlich:

$$t = \pi\left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\left(\frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots 2r}\right)^{2}\left(\operatorname{Sin} v \frac{\varphi}{2}\right)^{2r}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\left(\frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots 2r}\right)^{2}\left(\frac{b}{2a}\right)^{r}\right),$$

wobey das zweyte Glied in der bereits bestimmten Bedeutung (228. §. n. 15) muß genommen werden.

234. §.

5. Zusatz. Die Zeit t eines Schwunges im Bogen AEB ist demnach desto kleiner, je kleiner ist der Erhöhungswinkel $ACE = \varphi$, je kleiner demnach der Bogen AEB, in welchem das Pendul sich bewegt, und je kleiner damit ist auch $b = PE$ (233. §.): nimmt man an, daß die Schwungbewegung eines einfachen Penduls CE, in einem sehr kleinen Bogen AEB geschehen soll, bey welchem $b = PE$ in Vergleichung mit der Länge $a = CE$ des Penduls sehr klein seyn mag;

mag; so wird, was nach 1 in (233. §.) folgt, unbeträchtlich, mithin, zwar nicht ganz genau, doch sehr nahe, die Zeit eines ganzen Schwunges $t = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$ seyn (233. §.)

235. §.

6. Zusatz. Nach (178. §.) bedeutet g die Beschleunigung der Schwere, nämlich die Höhe, durch welche ein schwerer Körper in der ersten Secunde frey fallen würde: dieselbe läßt sich daher aus $g = \frac{a\pi^2}{2t^2}$ (234. §.) herleiten, wenn man durch Beobachtungen die Zeit t findet, binnen welcher ein einfaches Pendul, von einer bestimmten Länge a seine einzelnen Schwingungen in einem sehr kleinen Kreisbogen vollziehet.

236. §.

7. Zusatz. Für $t = 1$ Secunde erhält man $a = \frac{2g}{\pi^2}$ (234. §.), welches für die bekannte Beschleunigung g der Schwere, die Länge eines einfachen Secunden-Penduls, nämlich eines solchen Penduls giebt, welches jeden ganzen Schwung in einem sehr kleinen Kreisbogen AEB, binnen einer Zeitsecunde vollziehen würde.

237. §.

8. Zusatz. Wenn an allen Oertern der Erde das einfache Secunden-Pendul einerley Länge a hätte; so würde auch die Beschleunigung g der Schwere überall einerley seyn, nämlich an allen Oertern $g = \frac{1}{2}a\pi^2$ (236. §.), zwar nicht ganz genau, doch sehr nahe, sobald der Schwungbogen sehr klein ist (234. §.): ist aber an verschiedenen Oertern auch

die

die Länge des einfachen Secunden-Penduls verschieden, wie dieses manche Beobachtungen wirklich lehren; so muß auch die Beschleunigung g der Schwere an denselben Oertern verschieden seyn, und die Beschleunigungen der Schwere an verschiedenen Oertern, verhalten sich gegen einander wie die Längen der Secunden-Pendul an denselben Oertern: denn wenn G die Beschleunigung der Schwere an einem Orte, und g an einem andern Orte, L aber die Länge des Secunden-Penduls am ersten, und l am zweyten Orte ist; so hat man $G=\frac{1}{2}L\pi^2$, $g=\frac{1}{2}l\pi^2$; mithin $G:g=L:l$.

238. §.

9. Zusatz. Sind L, l die Längen zweyer Pendul, welche sich in ähnlichen Kreisbogen, unter einerley Erhöhungswinkel $=\varphi$ schwingen, und T, t die Zeiten, in welchen sie ihre einzelnen Schwingungen vollziehen; so ist nach (233. §.), wenn S den zusammengesetzten Factor bedeutet, welcher bey der Formul in (233. §.) vorkömmt,

$$t=\pi S\sqrt{\frac{l}{2g}};\quad T=\pi S\sqrt{\frac{L}{2g}};$$

also $t^2:T^2=l:L$, und $t:T=\sqrt{l}:\sqrt{L}$.

239. §.

10. Zusatz. Und wenn n die Anzahl der Schwingungen bedeutet, welche das Pendul l binnen der Zeit Z, N aber die Anzahl der Schwingungen anzeigt, welche das Pendul L in derselben Zeit Z vollzieht, die beyden Pendul aber sich in ähnlichen Bogen schwingen; so ist $1:n=t:Z$, und $1:N=T:Z$, wenn t, T die Zeiten sind, binnen welchen

die

die Pendul l, L ihre einzelnen Schwingungen vollziehen: also ist $t = \frac{Z}{n}$, $T = \frac{Z}{N}$, mithin (238. §.)

$$\frac{Z}{n} : \frac{Z}{N} = \sqrt{l} : \sqrt{L}, \text{ und } N^2 : n^2 = l : L,$$

oder $N : n = \sqrt{l} : \sqrt{L}$.

240. §.

Erklärung. Das einfache Pendul, wovon bisher die Rede war, kömmt bey wirklicher Anwendung der Mechanik nie vor: wenn man einen Faden CE nimmt, an einem Ende E einen schweren Körper, etwa eine bleyerne Kugel, und das andere Ende selbst an C dergestalt befestiget, daß der Faden samt dem daran hängenden schweren Körper sich um C schwingen kann; so hat man wohl ein Pendul, aber kein einfaches, wie immer auch der Faden zart, und der daran hängende Körper klein ist (229. §.). Ueberhaupt heißt jeder schwere Körper aDBEa (19. Fig.) ein **zusammengesetztes Pendul**, wenn er an einer horizontalen Axe mn dergestalt befestigt ist, daß er sich um mn frey schwingen kann. 19. Fig.

241. §.

1. **Zusatz.** Sey G der Schwerpunct des zusammengesetzten Penduls aDBEa, das Gewicht aber desselben, und die ihm proportionale Masse sey P, und a G = D die senkrechte Entfernung Ga des Schwerpunets G, von der Umdrehungsaxe mn; so kann man mit Pk^2 das Moment der Trägheit der ganzen Masse aDBEa in Ansehung einer durch ihren Schwerpunct G gehenden, zu mn parallelen Axe bezeichnen

zeichnen (214. §.), mithin durch Pk^2+PD^2 das Moment der Trägheit derselben Masse in Ansehung der Axe mn ausdrücken (215. §.): da also der Schwerpunct G vom Gewichte P der ganzen Masse aDBEa so stark unterwärts nach verticaler Richtung gedrückt wird, als wenn dieselbe Masse gar nicht schwer wäre, sondern an G ein Gewicht $=P$ frey hienge; so wird die Schwungbewegung der Masse aDBEa eben so erfolgen, als wenn eine gerade durch ihren Schwerpunct G gehende unbiegsame Linie aB an a befestigt wäre, an G aber eine Masse $=\frac{Pk^2+PD^2}{D^2}=M$ sich befände, und darauf nach verticaler Richtung unterwärts eine Kraft $=P$ wirkte (226. §.).

242. §.

2. Zusatz. Wenn demnach beym zusammengesetzten Pendul aDBEa der Erhöhungswinkel $\beta aG=\varphi$ gegeben ist, welchen sein Durchmesser der Schwere $aG=D$ mit der verticalen Linie $a\beta$ einschließen mag, und man annimmt, das Pendul sey bey dieser Erhöhung frey gelassen; so wird der Schwerpunct G binnen einer Zeit T durch den Kreisbogen Gg fallen, und in g eine Geschwindigkeit (241. 228. §. n. 6.)

$$C=2\sqrt{\frac{DgP(\mathrm{Cos}(\varphi-\alpha)-\mathrm{Cos}\varphi)}{\frac{Pk^2+PD^2}{D^2}}},$$

oder

$$C=2D\sqrt{\frac{gD}{k^2+D^2}(\mathrm{Cos}(\varphi-\alpha)-\mathrm{Cos}\varphi)}$$

erlangen.

243. §.

243. §.

3. Zusatz. Aus (242. §.) erhellet, daß die in (231. 232. §.) für ein einfaches Pendul angeführten Schlüsse, auch hier für das zusammengesetzte Pendul gelten: demnach wird sein Schwerpunkt G mit allmählich zunehmender Geschwindigkeit C im Kreisbogen GC fallen, und in der verticalen Linie $\alpha\beta$ die größte Geschwindigkeit (242. 228. §. n. 14.)

$$C = 2D\sqrt{\frac{gD}{k^2+D^2}}\operatorname{Sin v}\frac{\phi}{2}$$

binnen der Zeit (241. 228. §. n. 15)

$$T = \frac{\pi}{2D}\left(\frac{D(k^2+D^2)}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\left(\frac{(1.3.5\cdots(2r-1)}{2.4.6\cdots 2r}\right)^2\cdot\left(\operatorname{Sin v}\frac{\phi}{2}\right)^{2r}\right)$$

erlangen, hierauf auf der entgegengesetzten Seite der verticalen Linie $\alpha\beta$ mit allmählich abnehmender Geschwindigkeit durch einen dem vorigen GC gleichen Kreisbogen steigen, sodann zurückkehren, und sich so um die Axe m n unaufhörlich schwingen, wenn nichts seine Bewegung stört.

244. §.

4. Zusatz. Denkt man sich außer diesem zusammengesetzten Pendul aDBEa ein einfaches Pendul von der Länge l, welches in der Zeit t einen ganzen Schwung vollziehen mag, und nimmt man an, der Erhöhungswinkel dieses Penduls sey dem Erhöhungswinkel $\varphi = \beta a G$ des zusammengesetzten gleich; so ist nach (243. 233. §.)

$$T : t = \frac{1}{D}\left(\frac{D(k^2+D^2)}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{l}{2g}\right)^{\frac{1}{2}},$$

oder

oder auch

$$T:t=\left(\frac{k^2+D^2}{D}\right)^{\frac{1}{2}}:1^{\frac{1}{2}}.$$

und $T^2:t^2=\left(\frac{k^2}{D}+D\right):1.$

245. §.

5. Zusatz. Wäre $D=aG=1$; so wäre $\frac{k^2}{D}+D>1$, mithin $T^2>t^2$, und $T>t$, das heißt: die Zeit T eines ganzen Schwunges des zusammengesetzten Penduls aDBEa ist größer, als die Zeit, in welcher ein einfaches Pendul, bey einerley Erhöhungswinkel einen ganzen Schwung vollziehen würde, wenn seine Länge der Entfernung des Schwerpuncts G des zusammengesetzten Penduls von der Umdrehungsaxe m n gleich wäre.

246. §.

6. Zusatz. Denkt man sich aber ein einfaches Pendul, dessen Länge $l=\frac{k^2}{D}+D$ seyn mag; so ist auch $T^2=t^2$, und $T=t$ (244. §.), das heißt: das zusammengesetzte Pendul aDBEa und ein einfaches Pendul von der Länge $l=\frac{k^2}{D}+D$ würden bey einerley Erhöhungswinkel ihre einzelnen Schwingungen in einerley Zeit vollziehen. Da also $\frac{k^2}{D}+D$ eine mögliche gerade Linie ist $=\frac{k^2}{aG}+aG$; so ist klar, daß man sich für jedes zusammengesetzte Pendul aDBEa ein einfaches Pendul (229. §.) von der Länge $az=aG+\frac{k^2}{aG}$ denken kann, welches bey einerley

Erhö-

Erhöhungswinkel $\beta a B$ in eben der Zeit seine einzelnen Schwingungen vollziehen würde, in welcher sie das zusammengesetzte vollzieht; man müßte sich nämlich im Puncte z die ganze durch den Raum aDBEa verbreitete Masse des zusammengesetzten Penduls beysammen denken.

247. §.

Erklärung. Der Punct z auf dem Durchmesser der Schwere aB eines zusammengesetzten Penduls aDBEa, der die Eigenschaft hat, daß, wenn die gesammte Masse des zusammengesetzten Penduls in demselben Puncte vereinigt wäre, man dadurch ein einfaches Pendul az (229. §.) erhielte, welches bey einerley Erhöhungswinkel $\beta a B$ jeden ganzen Schwung um den Punct a in eben der Zeit vollziehen würde, in welcher er vom zusammengesetzten Pendul aDBEa vollgezogen wird (246. §.), heißt der **Mittelpunct des Schwunges.**

248. §.

Zusatz. Die Entfernung az des Mittelpuncts des Schwunges eines zusammengesetzten Penduls aDBEa von der Schwungaxe mn giebt die Länge eines einfachen Penduls, welches bey einerley Erhöhungswinkel mit jenem einzelne Schwingungen in gleichen Zeiten vollziehen würde (247. §.), und man findet sie, sobald das Moment der Trägheit, etwa μ, des zusammengesetzten Penduls aDBEa in Ansehung der horizontalen Schwungaxe mn, nebst der Entfernung D=aG des Schwerpuncts G von der Schwungaxe mn bekannt ist, wenn man das Moment der Trägheit μ durch das statische Moment P.D dividirt.

Denn es war $az = D + \frac{k^2}{D}$ (246. §.), und Pk^2 das Moment der Trägheit in Anſehung der durch den Schwerpunct G gehenden horizontalen Are (241. §.): alſo iſt $\mu = Pk^2 + PD^2$ (daſ.), und $k^2 = \frac{\mu - PD^2}{P}$, daher

$$az = D + \frac{\mu - PD^2}{PD} = \frac{\mu}{PD}.$$

Beyſpiel.

20. Fig. 1. Das Pendul beſtehe aus einer Stange ab (20. Fig.) und einer daran befeſtigten Kugel bpq, dergeſtalt, daß die Schwerpuncte c, g der Kugel und der Stange in einer durch den Aufhängungspunct a gehenden geraden Linie ad liegen; ſo liegt der gemeinſchaftliche Schwerpunct der Kugel und der Stange, mithin der Schwerpunct des ganzen Penduls irgendwo in G zwiſchen g und c.

2. Das Gewicht der Stange ſey p, und ihre Länge $ab = a$; die Dicke aber ſey ſo gering, daß man ſie in Vergleichung mit der Länge als unbeträchtlich betrachten darf; ſo iſt $ag = bg = \frac{1}{2}a$ die Entfernung des Schwerpuncts g von a und b, und $\frac{1}{2}p$ iſt das Gewicht der halben Stange: das Moment der Trägheit der ganzen Stange in Anſehung einer durch ihren Schwerpunct g laufenden horizontalen Are iſt alſo nach (223. 208. §.), wegen des dortigen $h = 0$,

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}p \cdot (\tfrac{1}{2}a)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}p \cdot (\tfrac{1}{2}a)^2 = \tfrac{1}{12}pa^2.$$

3. Das Gewicht der Kugel bpq ſey P, und r ihr Halbmeſſer; ſo iſt das Moment der Trägheit der Kugel in Anſehung ihres horizontalen Durchmeſſers nach (221. §.) $= \frac{2}{5}Pr^2$.

4. Aus

4. Aus (2) 3) noch (215. 208. §.) erhält man das Moment der Trägheit des ganzen Penduls in Anſehung der horizontalen Schwungaxe mn.

$$(\tfrac{1}{12}pa^2+\tfrac{1}{4}pa^2)+(\tfrac{2}{5}Pr^2+P(a+r)^2)=$$
$$=\tfrac{1}{3}pa^2+P(a^2+2ar+\tfrac{7}{5}r^2).$$

5. Es iſt ferner $gG=\frac{gc\,.\,P}{P+p}=\frac{(a+2r)P}{2(P+p)}$ die Entfernung des gemeinſchaftlichen Schwerpuncts G, der Stange ab, und der Kugel bpq vom Schwerpuncte g der Stange; mithin iſt $aG=ag+gG=\frac{1}{2}a+\frac{(a+2r)P}{2(P+p)}$ die Entfernung deſſelben von a: alſo iſt $aG(P+p)=(a+r)P+\frac{1}{2}ap$ das ſtatiſche Moment des ganzen Penduls in Anſehung der Axe mn. Hieraus und aus (4) erhält man alſo

$$\frac{\frac{1}{3}pa^2+P(a^2+2ar+\frac{7}{5}r^2)}{(a+r)P+\frac{1}{2}ap}$$

für die Entfernung des Mittelpuncts des Schwunges von der Schwungaxe mn.

6. Wird, ſtatt der Stange ab, ein Faden genommen, deſſen Gewicht p in Vergleichung mit dem Gewichte P der Kugel ſehr gering ſeyn mag; ſo kann man dieſelbe Entfernung $=\frac{a^2+2ar+\frac{7}{5}r^2}{a+r}=a+r+\frac{2r^2}{5(a+r)}$ ſetzen.

die Länge des einfachen Secunden-Penduls verschieden, wie dieses manche Beobachtungen wirklich lehren; so muß auch die Beschleunigung g der Schwere an denselben Oertern verschieden seyn, und die Beschleunigungen der Schwere an verschiedenen Oertern, verhalten sich gegen einander wie die Längen der Secunden-Pendul an denselben Oertern: denn wenn G die Beschleunigung der Schwere an einem Orte, und g an einem andern Orte, L aber die Länge des Secunden-Penduls am ersten, und l am zweyten Orte ist; so hat man $G = \frac{1}{2}L\pi^2$, $g = \frac{1}{2}l\pi^2$; mithin $G:g = L:l$.

238. §.

9. Zusatz. Sind L, l die Längen zweyer Pendul, welche sich in ähnlichen Kreisbogen, unter einerley Erhöhungswinkel $= \varphi$ schwingen, und T, t die Zeiten, in welchen sie ihre einzelnen Schwingungen vollziehen; so ist nach (233. §.), wenn S den zusammengesetzten Factor bedeutet, welcher bey der Formul in (233. §.) vorkömmt,

$$t = \pi S\sqrt{\frac{l}{2g}};\quad T = \pi S\sqrt{\frac{L}{2g}};$$

also $t^2:T^2 = l:L$, und $t:T = \sqrt{l}:\sqrt{L}$.

239. §.

10. Zusatz. Und wenn n die Anzahl der Schwingungen bedeutet, welche das Pendul l binnen der Zeit Z, N aber die Anzahl der Schwingungen anzeigt, welche das Pendul L in derselben Zeit Z vollzieht, die beyden Pendul aber sich in ähnlichen Bogen schwingen; so ist $1:n = t:Z$, und $1:N = T:Z$, wenn t, T die Zeiten sind, binnen welchen

die

die Pendul l, L ihre einzelnen Schwingungen vollziehen: also ist $t = \frac{Z}{n}$, $T = \frac{Z}{N}$, mithin (238. §.)

$$\frac{Z}{n} : \frac{Z}{N} = \sqrt{l} : \sqrt{L}, \text{ und } N^2 : n^2 = l : L,$$

oder $N : n = \sqrt{l} : \sqrt{L}$.

240. §.

Erklärung. Das einfache Pendul, wovon bisher die Rede war, kömmt bey wirklicher Anwendung der Mechanik nie vor: wenn man einen Faden CE nimmt, an einem Ende E einen schweren Körper, etwa eine bleyerne Kugel, und das andere Ende selbst an C dergestalt befestiget, daß der Faden samt dem daran hängenden schweren Körper sich um C schwingen kann; so hat man wohl ein Pendul, aber kein einfaches, wie immer auch der Faden zart, und der daran hängende Körper klein ist (229. §.). Ueberhaupt heißt jeder schwere Körper aDBEa (19. Fig.) ein zusammengesetztes Pendul, wenn er an einer horizontalen Axe mn dergestalt befestigt ist, daß er sich um mn frey schwingen kann. 19. Fig.

241. §.

1. Zusatz. Sey G der Schwerpunct des zusammengesetzten Penduls aDBEa, das Gewicht aber desselben, und die ihm proportionale Masse sey P, und a G = D die senkrechte Entfernung Ga des Schwerpuncts G, von der Umdrehungsaxe mn; so kann man mit Pk^2 das Moment der Trägheit der ganzen Masse aDBEa in Ansehung einer durch ihren Schwerpunct G gehenden, zu mn parallelen Axe bezeichnen

schriebenen bedeutet, X aber den Flächeninhalt des ganzen Kreises bezeichnet, allemal ist:

I. $P > \pi$ und $p < \pi$.

II. $X > \frac{pr}{2}$ und $X < \frac{Pr}{2}$.

3) Wegen I) sey $P - \pi = D$ und $\pi - p = d$, mithin $P = D + \pi$, und $p = \pi - d$; so ist wegen II.) allemal

III. $X > \frac{\pi r}{2} - \frac{dr}{2}$, $X < \frac{\pi r}{2} + \frac{Dr}{2}$.

4) Die geraden Linien d, D in (3) sind desto kleiner, je näher die Vielecke (2) an der Peripherie des Kreises liegen: es läßt sich aber aufs schärfste darthun, daß für jede denkbare wie immer kleine gerade Linie z solche Vielecke (2) denkbar sind, für welche ist sowohl $D < z$, als $d < z$, mithin auch $\frac{Dr}{2} < \frac{zr}{2}$, $\frac{dr}{2} < \frac{zr}{2}$.

5) Es ist aber für jede denkbare, wie immer kleine Fläche e eine gerade Linie z denkbar, wofür $\frac{1}{2} r.z < e$ seyn muß (1).

6) Demnach sind auch solche gerade Linien D, d in (3) denkbar, für welche die Rechtecke $D.\frac{r}{2}$, $d.\frac{r}{2}$ kleiner seyn würden, als jede denkbare, wie immer kleine, Fläche e, nach (4) 5).

7) In (III) nach (8. §.) muß also nothwendig $X = \frac{\pi r}{2}$ seyn.

251. §.

Was nun Herr Michelsen denjenigen Exhaustions-Beweisen entgegensetzt, welche unter die von ihm angeführte sehr richtige Beschreibung des Abbe de la Chapelle gehören, betrifft sowohl meinen Satz in (8. §.), als die Art die Beweise darauf zu gründen, wie es z. B. in (250. §.) geschah. Auf die Frage: wie weit erstrecken sie sich? antwortet er so: (a)

„Meiner Meinung nach nicht weiter, als daß sie die „Gleichheit zweyer Größen darthun, in sofern sich diese „Größen durch Zahlen ausdrücken lassen. Daß sich keine „Größe geben lasse, um welche ein Kreis und ein rechtwink„lichtes Dreyeck von einander verschieden wären, dessen eine „Cathete dem Umfange des Kreises, die andere dem Radius „desselben gleich ist, das setzt z. B. der archimedeische Be„weis außer allen Zweifel; allein ob nicht gleichwohl zwi„schen einem Kreise und einem Dreyecke von der gedachten „Art ein Unterschied möglich sey, dessen Größe zwar unbe„stimmbar klein, aber demungeachtet immer ein gedenkba„rer Unterschied und nicht = o wäre? Dieses läßt sich dar„nach weder bejahen, noch verneinen.“

„Irre ich mich in dieser Behauptung nicht: so ist das „meine sehr leichte Folge aus dem Bisherigen, daß alle die „Sätze der Mathematik, welche auf Exhaustions-Beweisen „der beschriebenen Art beruhen, so lange sie bloß dadurch „bewiesen werden, noch nicht in möglich größter Schärfe „und Strenge bewiesen worden seyen.“

(a) Beyträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik. 3tes Stück. S. 193. 194.

252. §.

Also könnte in (8. §.) noch immer ein Unterschied zwischen Z und X vorhanden seyn, welcher zwar unbestimmbar klein, doch nicht $=0$, wäre (251. §.), das heißt; es könnte zwischen Z und X noch immer ein Unterschied D Statt finden, welcher zwar kleiner als jede Größe, die sich angeben läßt, aber noch nicht $=0$, sondern eine wirkliche zu der Art gehörige Größe wäre, zu welcher die Größen Z, X gehören mögen: aber eben hievon ist die Unmöglichkeit in (8. §.) dargethan worden, zwar bey der Voraussetzung, daß U, V daselbst solche Größen sind, welche kleiner können gedacht werden, als jede denkbare, wie immer kleine gleichartige Größe; nur bey der Anwendung des Satzes (8. §.) muß allemal bewiesen werden, daß solche Größen U, V wirklich da sind, wie z. B. in (250. §.). Der unbestimmbar kleine, der doch nicht $=0$ ist, Unterschied zwischen X und $\frac{\pi r}{2}$ in (250. §.), welcher vielleicht da vorhanden seyn möchte (251. §.), müßte doch eine wirkliche Fläche e seyn, die mit keinem Puncte und keiner Linie dürfte verwechselt werden: da aber dafür kleinere Flächen $\frac{Dr}{2}$, $\frac{dr}{2}$ denkbar wären (250. §. n. 6.); so erhellet die Unmöglichkeit eines solchen Unterschiedes, wegen (250. §. n. 3.) nach (8. §.).

253. §.

Wie überzeugend die Beweise nach der Exhaustionsmethode sind, wenn dieselben gehörig geführt werden, und wie sehr dadurch selbst die analytische Erfindungsmethode

kann

kann erweitert werden, zeigt sich am ersprießlichsten, wenn man mit dem in (8. §.) aufgestellten Satze die Summirung der Reihen natürlicher Zahlen und ihrer Potenzen verbindet: ich will mir die drey ersten Potenzen zu Hülfe nehmen, um einen Satz zu beweisen, dessen Gebrauch in der Elementar-Mathematik wichtig genug ist. Ein leichtes wäre es mir, einen solchen Satz überhaupt für alle möglichen Potenzen zu erweisen; doch begnüge ich mich mit jenen Potenzen, da sie zu meinem Zwecke hinreichen. Daher setze ich voraus, folgende Summen seyen aus (I. Band. 141. §. 1. Zusatz) bekannt.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + N = \tfrac{1}{2}(N^2+N).$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+N^2 = \tfrac{1}{6}(2N^3+3N^2+N).$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+N^3 = \tfrac{1}{4}(N^4+2N^3+N^2).$$

254. §.

Wenn P, Q zwo bestimmte Größen sind; so muß eine ganze Zahl m denkbar seyn, für welche ist $P\frac{1}{m^2} < Q\frac{1}{m}$, und sowohl die Differenz $Q\frac{1}{m} - P\frac{1}{m^2}$, als die Summe $Q\frac{1}{m} + P\frac{1}{m^2}$ kleiner, als jede denkbare, wie immer kleine, doch wirkliche gleichartige Größe e.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem in (2. §.) bewiesenen allgemeinen Satze: ich will ihn aber unabhängig von jenem Satze darthun, damit die vollkommenste Ueberzeugung, welche der Beweis gewährt, um so deutlicher könne bemerkt werden.

1. Die Zahl m mag was immer für eine seyn; so ist doch allemal $Q\frac{1}{m} - P\frac{1}{m^2} < Q\frac{1}{m} + P\frac{1}{m^2}$.

2. Nun mag e eine wie immer kleine, doch wirkliche, Größe bedeuten; so muß für die gegebene Größe P+Q eine ganze Zahl m denkbar seyn, wofür nemlich e ein Vielfaches größer als P+Q, mithin ein meel von P+Q kleiner als e möglich seyn würde, nämlich

$$\frac{1}{m}(P+Q) = \frac{1}{m}P + \frac{1}{m}Q < e.$$

3. Für dieselbe Zahl m wäre demnach $\frac{1}{m}P < e$ in (2): da also die gegebene Größe $Q > e$ seyn soll; so wäre auch $\frac{1}{m}P < Q$, folglich $\frac{1}{m^2}P < \frac{1}{m}Q$, und $Q\frac{1}{m} - P\frac{1}{m^2}$ eine wirklich bejahte Größe.

4. Weil ferner $\frac{1}{m^2}P < \frac{1}{m}P$ ist; so wäre auch $\frac{1}{m^2}P + \frac{P}{m}Q < e$, wegen (2): folglich in (3) auch $Q\frac{1}{m} - P\frac{1}{m^2} < e$, wegen (1).

Es ist einleuchtend, daß der Hauptgrund des Beweises in (2) liegt, welches selbst Michelsen nicht bezweifeln darf, wenn er sich auch eine nach seiner Vorstellungsart unendlich, oder, welches bey ihm gleich viel bedeutet, unbestimmbar kleine, doch in sich bestimmte wirkliche Größe, bey e denken will: noch immer wäre eine solche ganze Zahl m denkbar, nur unbestimmbar groß müßte sie seyn, wenn e unbestimmbar klein wäre. Wir werden übrigens unten

sehen,

kann erweitert werden, zeigt sich am ersprießlichsten, wenn man mit dem in (8. §.) aufgestellten Satze die Summirung der Reihen natürlicher Zahlen und ihrer Potenzen verbindet: ich will nur die drey ersten Potenzen zu Hülfe nehmen, um einen Satz zu beweisen, dessen Gebrauch in der Elementar-Mathematik wichtig genug ist. Ein leichtes wäre es mir, einen solchen Satz überhaupt für alle mögliche Potenzen zu erweisen; doch begnüge ich mich mit jenen Potenzen, da sie zu meinem Zwecke hinreichen. Daher setze ich voraus, folgende Summen seyen aus (I. Band. 141. §. 1. Zusatz) bekannt.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + N = \tfrac{1}{2}(N^2+N).$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+N^2 = \tfrac{1}{6}(2N^3+3N^2+N).$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+N^3 = \tfrac{1}{4}(N^4+2N^3+N^2).$$

254. §.

Wenn P, Q zwo bestimmte Größen sind; so muß eine ganze Zahl m denkbar seyn, für welche ist $P\frac{1}{m^2} < Q\frac{1}{m}$, und sowohl die Differenz $Q\frac{1}{m} - P\frac{1}{m^2}$, als die Summe $Q\frac{1}{m} + P\frac{1}{m^2}$ kleiner, als jede denkbare, wie immer kleine, doch wirkliche gleichartige Größe e.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem in (2. §.) bewiesenen allgemeinen Satze: ich will ihn aber unabhängig von jenem Satze darthun, damit die vollkommenste Ueberzeugung, welche der Beweis gewährt, um so deutlicher könne bemerkt werden.

1. Die Zahl m mag was immer für eine seyn; so ist doch allemal $Q\frac{1}{m} - P\frac{1}{m^2} < Q\frac{1}{m} + P\frac{1}{m^2}$.

2. Nun mag e eine wie immer kleine, doch wirkliche, Größe bedeuten; so muß für die gegebene Größe P+Q eine ganze Zahl m denkbar seyn, wofür zumal e ein Vielfaches größer als P+Q, mithin ein theil von P+Q kleiner als e möglich seyn würde, nämlich

$$\frac{1}{m}(P+Q) = \frac{1}{m}P + \frac{1}{m}Q < e.$$

3. Für dieselbe Zahl m wäre demnach $\frac{1}{m}P < e$ in (2): da also die gegebene Größe $Q > e$ seyn soll; so wäre auch $\frac{1}{m}P < Q$, folglich $\frac{1}{m^2}P < \frac{1}{m}Q$; und $Q\frac{1}{m} - P\frac{1}{m^2}$ eine wirklich bejahte Größe.

4. Weil ferner $\frac{1}{m^2}P < \frac{1}{m}P$ ist; so wäre auch $\frac{1}{m^2}P + \frac{1}{m}Q < e$, wegen (2): folglich in (3) auch $Q\frac{1}{m} - P\frac{1}{m^2} < e$, wegen (1).

Es ist einleuchtend, daß der Hauptgrund des Beweises in (2) liegt, welches selbst Michelsen nicht bezweifeln darf, wenn er sich auch eine nach seiner Vorstellungsart unendlich, oder, welches bey ihm gleich viel bedeutet, unbestimmbar kleine, doch in sich bestimmte wirkliche Größe, bey e denken will: noch immer wäre eine solche ganze Zahl m denkbar, nur unbestimmbar groß müßte sie seyn, wenn e unbestimmbar klein wäre. Wir werden übrigens unten sehen,

257. §.

Der Satz in (256. §.) gilt auch alsdann, wenn auch einige unter den bestimmten Größen α, β, γ gleich Null gesetzt werden: ich habe alle drey auf einmal mitgenommen, um sieben verschiedene Sätze auf einmal darthun zu können. Dadurch lassen sich viele Sätze in der Elementarmathematik auf dem kürzesten Wege darthun, ohne daß man genöthigt sey, von der Exhaustionsmethode der Alten im geringsten abzuweichen; man hat sogar den Vortheil dabey, daß man den Anfänger zugleich mit der Erfindungsmethode einigermaßen bekannt machet: ein Beyspiel zur Probe wird hinreichen.

Für den gegebenen Halbmesser BC$=r$ (15. Fig.) den körperlichen Inhalt der Halbkugel DBE zu finden. 15. Fig.

1. Für das Verhältniß $1:\pi$ des Halbmessers zur halben Peripherie ist πr^2 der Quadratinhalt der Grundfläche DE.

2. Der ganze auf der Grundfläche DE senkrecht stehende Halbmesser BC$=r$ sey in m gleiche Theile getheilt; und durch alle Theilungspuncte denke man sich eben so viele zur Grundfläche parallele Durchschnitte: so kann man sich bey der Halbkugel DBE m umgeschriebene, und zugleich $m-1$ eingeschriebene Cylinder vorstellen, welche zur gemeinschaftlichen Höhe ein mtel des Halbmessers r haben sollen, wie z. B. der umgeschriebene Cylinder abgh, und der eingeschriebene cdfe für Pp$=\frac{r}{m}$ seyn würde.

3. Nimmt

3. Nimmt man an, es sey $Bp = \frac{n}{m} r$, und $BP = \frac{n+1}{m} r$, so ist

$$2r^2 \cdot \frac{n}{m} - r^2 \cdot \frac{n^2}{m^2}$$

das Quadrat des Halbmessers des Durchschnitts df, und

$$2r^2 \cdot \frac{n+1}{m} - r^2 \cdot \frac{(n+1)^2}{m^2}$$

ist das Quadrat des Halbmessers des Durchschnittes ah: da also die Durchschnitte df, ah sich gegen die Grundfläche DE, wie die Quadrate ihrer Halbmesser gegen das Quadrat des Halbmessers r verhalten; so ist wegen (1)

$$r^2 : \left(2r^2 \cdot \frac{n}{m} - r^2 \cdot \frac{n^2}{m^2}\right) = \pi r^2 : df = \pi r^2 \left(2\frac{n}{m} - \frac{n^2}{m^2}\right);$$

$$r^2 : \left(2r^2 \cdot \frac{n+1}{m} - r^2 \cdot \frac{(n+1)^2}{m^2}\right) = \pi r^2 : ah = \pi r^2 \left(2\frac{n+1}{m} - \frac{(n+1)^2}{m^2}\right).$$

4. Wegen (3) ist also der

umgeschriebene Cylinder

$$abgh = ah \cdot Pp = \pi r^3 \left(2\frac{n+1}{m^2} - \frac{(n+1)^2}{m^3}\right)$$

und der eingeschriebene

$$cdfe = df \cdot Pp = \pi r^3 \left(2\frac{n}{m^2} - \frac{n^2}{m^3}\right).$$

5. Nun ist klar, daß, wegen (2) 3) abgh eigentlich der, von B an gegen DE zu gerechnet, $(n+1)^{te}$ umgeschriebene, und cdfe der n^{te} eingeschriebene Cylinder ist, daß man also alle m umgeschriebenen, und $m-1$ eingeschriebenen Cylinder erhalten würde, wenn man nach und nach $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $\ldots$ $n = m-1$ in (4) setzte:

setzte: da also die Halbkugel DBE gewiß größer als die Summe aller eingeschriebenen, und zugleich kleiner als die Summe aller umgeschriebenen Cylinder in (2) seyn muß; so hat man wegen (4) nach (255. §.)

$$DBE > S\left(2\pi r^3 \frac{n}{m^2} - \pi r^3 . \frac{n^2}{m^3}\right);$$

und zugleich

$$DBE < S\left(2\pi r^3 \frac{n+1}{m^2} - \pi r^3 . \frac{(n+1)^2}{m^3}\right).$$

Nun gilt dieses gewiß allemal, es mag die Zahl in der gleichen Theilchen von $r = BC$ in (2) wie immer groß gedacht werden: also ist nach (256. §.) $DBE = \frac{2}{3} . 2\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$.

Auf gleiche Art kann man den Cubicinhalt eines unbestimmten Abschnittes aBb bestimmen, und so auch jede Pyramide, jeden Kegel, und die runden durch die Umdrehung der Kegelschnitte um ihre Axen erzeugten Körper berechnen. Für alle solche Körper lassen sich auch die Schwerpuncte in der Statik bestimmen, so wie auch der einzige vorhergehende Satz zur Auflösung vieler wichtigen Aufgaben in der gesammten angewandten Mathematik kann mit großem Vortheil gebraucht werden, z. B. bey der Berechnung des Moments der Trägheit; Bestimmung der Räume bey der gleichförmig beschleunigten Bewegung, u. d. gl.

258. §.

Die ältesten merkwürdigsten Schriften, welche zur Erweiterung der mathematischen Erfindungsmethode den Weg bahnten, sind: *Geometria indivisibilibus continuorum nova*

qua-

quadam ratione promota, welche *Cavalleri*, im J. 1635 herausgab, und die darauf gebaute im Jahr 1655 von *Wallis* herausgegebene *Arithmetica infinitorum*. *Cavalleri* ſtellte ſich jede ebene Figur aus lauter geraden Linien, und jeden Körper aus Ebenen zuſammengeſetzt vor: jede ebene Figur, und jeder Körper ſollte demnach aus untheilbaren Theilen beſtehen, und aus dieſem Grunde hieß auch ſeine Erfindungsmethode die Methode der Untheilbaren, (*Methodus indiviſibilium.*) Eben ſo betrachtete Wallis die ebenen Figuren und Körper; jene waren bey ihm aus unendlich vielen parallelen Linien, und dieſe aus unendlich vielen parallelen Ebenen zuſammengeſetzt. Er meinte, man könne ſich zwar hier die Vorſtellung machen, als wenn zwiſchen den parallelen Linien Parallelogrammen, und zwiſchen den parallelen Ebenen Cylinder oder Priſmen, gleichſam eingeſchoben, vorhanden wären, welche alle eine Höhe, nämlich einen unendlich kleinen aliquoten Theil der Höhe der ganzen Figur, oder des ganzen Körpers haben ſollten: doch glaubte Er, es ſey allerdings beſſer, die erſte Vorſtellungsart beyzubehalten, theils damit die Unterſuchungen abgekürzt werden, theils auch um ſich von den Grundſätzen der bereits angenommenen Methode der Untheilbaren nicht zu entfernen, da ohnehin die unendlich kleine Höhe eigentlich keine Höhe iſt, mithin jene Parallelogrammen und Cylinder oder Priſmen im Grunde nur gerade Linien und ebene Figuren ſind. Mit dieſen Grundſätzen verband hierauf Wallis die Verhältniſſe der Summen der von o an in natürlicher Ordnung wachſenden Zahlen $o, 1, 2, 3, \ldots n$, und ihrer Potenzen $o^m, 1^m, 2^m, \ldots n^m$ gegen die Summen

der

die aus gleich vielen, den größten Gliedern n und n^m gleichen Gliedern bestehenden Reihen $n, n, n, n, \ldots n$ und $n^m, n^m, n^m, n^m, \ldots n^m$, die Er durch Induction für jede Gattung der Exponenten m zu bestimmen sucht.

259. §.

So schwankend und unmathematisch auch die Grundsätze der Cavalerischen Methode der Untheilbaren sind, worauf Wallis seine Rechnungen in der *Arithmetica infinitorum* gebaut hatte; so haben wir doch Walliseo Methode die wichtigsten Entdeckungen zu verdanken: die der Mathematik eigene Evidenz und Gewißheit, das vollkommen Ueberzeugende, wodurch sich die Exhaustionsmethode der Alten so sehr empfohlen hat, findet man zwar bey seinen Untersuchungen nicht; es war aber in dem damaligen Zustande der Mathematik keine leichte Sache, bey den Erweiterungen der Erfindungsmethode, welche er überall zum Ziel hatte, diejenige Schärfe und Strenge bey Beweisen zu beobachten, welche bey allen Beweisen nach der Exhaustionsmethode der Alten herrscht. Unverzeihlich ist es hingegen, daß viele unter den neueren Schriftstellern noch immer jenen Grundsätzen getreu bleiben, welche beyde, Cavaleri und Wallis, ganz gewiß verwerfen würden, wenn sie am Ende des achtzehnten Jahrhunderts lebten. Auch Karsten hat sich bey einigen Untersuchungen der Reihen natürlicher Zahlen bedient, aber auf eine mehr überzeugende Art: er findet z. B. [a], daß, wenn ein schwerer Punct in der ersten Secunde, indem er frey fällt, die Geschwindig-

keit k erlanget, und in der Zeit t durch die Höhe s fälle, allemal

$$s > kt^2(1+2+3+\cdots+(m-1))\,\frac{1}{m^2},$$

und zugleich

$$s < kt^2(1+2+3+\cdots+m)\,\frac{1}{m^2},$$

oder

$$s > \tfrac{1}{2}kt^2 - \tfrac{1}{2}kt^2.\frac{1}{m} \text{ und } s < \tfrac{1}{2}kt^2 + \tfrac{1}{2}kt^2.\frac{1}{m}$$

seyn muß, wenn m eine unbestimmte Anzahl gleicher Theile bedeutet, in welche man sich die ganze Zeit t eingetheilt denken kann: freylich wäre es zu wünschen gewesen, daß er vermieden hätte, $m = \infty$ zu setzen, um daraus $s = \frac{1}{2}kt^2$ zu erhalten; er würde nicht nöthig gehabt haben, sich darüber an einem andern Orte [b] umständlicher zu erklären, um den Verdacht, als wenn bey einem solchen Verfahren eine unendliche Reihe wirklich summirt würde, von sich abzulehnen. Aus diesem Grunde ist der Beweis, welchen Hr. Hofr. Kästner für die Ausrechnung der Pyramiden gegeben hat [c] bündiger, einleuchtender, und dem Geiste der Alten mehr angemessen. Der im (256. §.) erwiesene Satz ist eine Erweiterung der Methode, solche Untersuchungen anzustellen: daß es nicht schwer wäre, dieselbe auf alle Potenzen natürlicher Zahlen auszudehnen, habe ich bereits bemerkt (253. §.). Dieses soll nun jetzt geschehen, aber auf eine andere, meinem Vorhaben, den Uebergang von der Exhaustionsmethode der Alten zur Differential- und Integralrechnung, wie er hätte geschehen können, aufs

deut-

deutlichſte und allgemeinſte zu zeigen, entſprechendere Art.

(a) Lehrbegriff der geſammten Mathematik. III. Theil. Mechanik. 24. §.

(b) Mathematiſche Abhandlungen. I. Abhandlung. 61. 64. §.

(c) Geometriſche Abhandlungen. 2te Sammlung. 6. u. 7. Aufſatz.

260. §.

Der veränderliche Theil Z jeder Function $y = Z + \text{Conſt.}$ von einer abſoluten veränderlichen Größe x iſt gleich der Summe aller Werthe, welche die Differenz Δy erhalten würde, wenn man bey ihr nach und nach $0.\Delta x$, $1.\Delta x$, $2.\Delta x$, $3.\Delta x$ ... $(m-1)\Delta x$ ſtatt x nähme, wie immer auch der Nenner m des aliquoten Theils $\Delta x = \frac{x}{m}$ klein oder groß iſt (40. §.)

1. Es iſt nach (44. §.) $\Delta y = \Delta Z$.

2. Weil $\Delta x = \frac{x}{m}$ ſeyn ſoll; ſo iſt $m\Delta x = x$, und $(m+1)\Delta x = x + \Delta x$. Wenn man alſo $(m+1)\Delta x$ ſtatt x in Z ſetzt; ſo entſtehet Z' aus Z, und weil $Z' - Z = \Delta Z = \Delta y$ in (1). Setzt man aber $m\Delta x$ ſtatt x in Z; ſo bleibt Z unverändert.

3. Man ſtelle ſich vor, es werden die Glieder folgender Reihe I) nach und nach ſtatt x in Z genommen, wofür Z die Werthe in II), derer Unterſchiede $A - 0 = A$, $A^2 - A = a^1$, $A^3 - A^2 = a^2$, u. ſ. f. in III) ſtehen ſollen, erlangen mag (2).

I. Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x$, - - - $(m-1)\Delta x$, $m\Delta x$, $(m+1)\Delta x$.
II. A, A^1, A^2, - - - A^{m-1}, Z, Z'.
III. A, a^1, a^2, - - - a^{m-2}, a^{m-1}, Δy.

4. Nun muß man darthun, daß, erstens, die Function Z der Summe aller Glieder der Reihe III), das letzte Glied Δy ausgeschlossen, gleich ist; und, zweytens, die einzelnen Glieder A, a^1, a^2, - - - a^{m-1} derselben Reihe entstehen würden, wenn man bey Δy nach und nach $\Delta x.0$, $\Delta x.1$, $\Delta x.2$, $\Delta x.3$, - - - - $\Delta x(m-1)$ statt x nähme.

5. Der erste Theil in (4) erhellt so. Es ist $a^r = A^{r+1} - A^r$, und $a^1 = A^2 - A^1$: also ist $A^2 = A + a^1$; $A^3 = A^2 + a^2 = A + a^1 + a^2$.

Und überhaupt soll in II) III) $a^r = A^{r+1} - A^r$, daher $A^{r+1} = A^r + a^r$ seyn: setzt man demnach $A^r = A + a^1 + a^2 + a^3 + - - - + a^{r-1}$; so ist $A^{r+1} = A + a^1 + a^2 + a^3 + - - - + a^{r-1} + a^r$.

Hieraus folgt, daß jedes nte Glied in II) der Summe von n Gliedern A, a^1, a^2, u. s. f. der Reihe III) gleich ist, (I. Band. 54. §.), daß demnach Z, als das nte Glied der Reihe II) der Summe $A + a^1 + a^2 + a^3 + - - - + a^{m-1}$ von m Gliedern der Reihe III) gleich seyn muß.

6. Und der zweyte Theil in (4) läßt sich so darthun: Wenn x in $x + \Delta x$ übergeht; so wird Z' aus Z nach (2): und wenn man $r\Delta x$ oder $(r+1)\Delta x$ statt x in Z nimmt; so erhält man daraus A^r oder A^{r+1} bey der Reihe II). Da also x und $x + \Delta x$ in $r\Delta x$ und $r\Delta x + \Delta x$ übergehen müssen, wenn man $r\Delta x$ statt x nimmt; so werden die Functionen

Z,

Z, Z' in A^r, A^{r+1} übergehen, wenn man bey ihnen $r\Delta x$ statt x setzt; folglich wird $A^{r+1} - A^r$ aus $Z' - Z$ entstehen, wenn man $r\Delta x$ statt x bey $\Delta y = Z' - Z$ in (1) nimmt, das heißt: wenn man $r\Delta x$ statt x bey $\Delta y = Z' - Z$ nähme; so würde man das $(r+1)$te Glied $a^r = A^{r+1} - A^r$ der Reihe III) erhalten. Die einzelnen Glieder von III) entstünden daher aus Δy, wenn man hier $\Delta x.0$, $\Delta x.1$, $\Delta x.2$, $\Delta x.3$ - - - $\Delta x(m-1)$ statt x nach und nach nähme.

261. §.

Denkt man sich also die absolute veränderliche Größe x bey einer Function y in m gleiche Theile getheilt, und setzt man $\Delta x = \frac{x}{m}$; so kann man sich die Vorstellung machen, daß x bey y von $x = 0.\Delta x$ an allmählich um die Differenz Δx wächst, dergestalt, daß x nach und nach in $\Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x$, u. s. f. bis $(m+1)\Delta x = x + \Delta x$ übergehe, wofür die Function y selbst nach und nach die Werthe $A, A', A'', \ldots y, y'$ erhalten mag, wie bey der Reihe II) in (260. §.); und wenn man hierauf jeden derselben Werthe von dem nächst folgenden abzöge, mithin die Differenzen $A - 0 = A$, $A' - A = a'$, $A'' - A' = a''$, - - - $y' - y = \Delta y$ nähme; so würden sie eine Reihe $A, a', a'', a''', \ldots a^{m-1}, \Delta y$ von $m+1$ Gliedern geben, dergestalt, daß man alle nach der Ordnung aus der letzten Differenz Δy erhielte, wenn man bey ihr $0\Delta x, 1\Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x, \ldots (m-1)\Delta x$ nähme: die Function y selbst (oder vielmehr nur der veränderliche Theil Z von ihr) wäre der Summe aller vorhergehenden Differenzen $A, a', a'', a''', \ldots a^{m-1}$ gleich (260. §.).

262. §.

Unabhängig von der Differentialrechnung, bloß mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes, wofür ein Beweis für alle rationale und irrationale Exponenten in (11. §.) ist angeführt worden, läßt sich beweisen, daß es vollkommen bestimmte, von z unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. geben muß, wofür und jeden Exponenten n ist $1^n+2^n+3^n+4^n+\cdots+z^n=\frac{z^{n+1}}{n+1}+\alpha z^n+\beta z^{n-1}+\gamma z^{n-2}+$ etc.; dieses geschieht um so leichter, da wir mehr von den Coefficienten α, β, γ, etc. zu wissen gar nicht brauchen. Für eine ganze bejahte Zahl n findet man eine Formul des summatorischen Gliedes in (1. Band. 141. §.); da aber der binomische Lehrsatz, auf welchem der Beweis derselben beruhet, auch für alle andern Zahlen n gilt; so muß die dortige Formul für alle Zahlen n gelten (eigentlich ist dort m der Exponent, und n was hier z), nur das letzte Glied muß bey ihr wegfallen: und eben aus dieser Formul kann man die obige Reihe herleiten, die ich daher hier als erwiesen annehme.

263. §.

Wenn N, x zwo von x und $\Delta x=\frac{x}{m}$ unabhängige Größen sind; so müssen andere ebenfalls von x und Δx unabhängige Größen möglich seyn, für welche die Summe $S N(x+\Delta x)^n \Delta x$ derjenigen Werthe, welche $N(x+\Delta x)^n \Delta x$ erhalten würde, wenn man $0\Delta x, 1\Delta x, 2\Delta x, \ldots (m-1)\Delta x$ nach und nach statt x nähme, der Summe des Quotienten $\frac{Nx^{n+1}}{n+1}$ und

der

der Producte aus jenen Größen in die Potenzen $\Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3$, etc. gleich wäre.

1. Nach dieser Voraussetzung ist $SN(x+\Delta x)^n \Delta x = N\Delta x^{n+1}(1^n+2^n+3^n+\cdots+(m-1)^n+m^n)$.

2. Also giebt es gewisse von x und Δx unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. wofür nach (262. §.) ist $SN(x+\Delta x)^n \Delta x = N\Delta x^{n+1}\left(\frac{m^{n+1}}{n+1} + \alpha m^n + \beta m^{n-1} \gamma m^{n-2} + \text{etc.}\right)$. Es ist aber vermöge der Voraussetzung $m = \frac{x}{\Delta x}$: also muß seyn

$$SN(x+\Delta x)^n \Delta x = \frac{Nx^{n+1}}{n+1} + N\alpha x^n . \Delta x + N\beta x^{n-1} . \Delta x^2 + N\gamma x^{n-2} . \Delta x^3 + \text{etc.}$$

264. §.

Bedeutet $SNx^n\Delta x$ die Summe derjenigen Reihe, welche man erhalten würde, wenn man $0\Delta x, 1\Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x, \cdots (m-1)\Delta x$ statt x bey $Nx^n\Delta x$ nach und nach nähme; so ist $SNx^n\Delta x = N\Delta x^{n+1}(1^n+2^n+3^n+\cdots+(m-1)^n)$ $= SN(x+\Delta x)^n \Delta x - N\Delta x^{n+1} . m^n$ (263. §. n. 1.) $= SN(x+\Delta x)^n \Delta x - Nx^n \Delta x$, wegen $m = \frac{x}{\Delta x}$: also

$$SNx^n \Delta x = \frac{Nx^{n+1}}{n+1} + N(\alpha - 1)x^n \Delta x + N\beta x^{n-1} \Delta x^2 + N\gamma x^{n-2} \Delta x^3 + \text{etc.}$$

265. §.

Wenn eine Function $y = Z + \text{Conſt.}$ von einer absoluten veränderlichen Größe x dergestalt beschaffen ist, daß für gewisse von x und Δx unabhängige

Gröſſen A, B, C, - - - a, b, c, - - - A', B', C', - - - a', b', c', - - - P, Q, R - - - p', q', r', - - - jede ganze bejahte Zahl r und jeden aliquoten Theil $\Delta x = \frac{x}{m}$ von x ihre Differenz

$$\Delta y > Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + Cx^c\Delta x + \text{etc.}$$

und zugleich

$$\Delta y < A(x+\Delta x)^a\Delta x + B(x+\Delta x)^b\Delta x + C(x+\Delta x)^c\Delta x + \text{etc.}$$

oder

$$\Delta y > \begin{matrix} (Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + Cx^c\Delta x + \text{etc.} \\ (+A'x^{a'}\Delta x^r + B'x^{b'}\Delta x^{r+1} + C'x^{c'}\Delta x^{r+2} + \text{etc.} \end{matrix}$$

und zugleich

$$\Delta y < \begin{matrix} (Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + Cx^c\Delta x + \text{etc.} \\ (+Px^{p'}\Delta x^r + Qx^{q'}\Delta x^{r+1} + Rx^{r'}\Delta x^{r+2} + \text{etc.} \end{matrix}$$

seyn muß; so ist nothwendig der veränderliche Theil derselben Function $Z = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \text{etc.}$

1. Gesetzt, SU, SV, SX, SY bedeuten die Summen derjenigen Werthe, welche die Functionen $U = Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + Cx^c\Delta x + \text{etc.}$; $V = A(x+\Delta x)^a\Delta x + B(x+\Delta x)^b\Delta x + C(x+\Delta x)^c\Delta x + \text{etc.}$; $X = U + A'x^{a'}\Delta x^r + B'x^{b'}\Delta x^{r+1} + C'x^{c'}\Delta x^{r+2} + \text{etc.}$; $Y = U + Px^{p'}\Delta x^r + Qx^{q'}\Delta x^{r+1} + Rx^{r'}\Delta x^{r+2} + \text{etc.}$ erhalten würden, wenn man bey ihnen $0\Delta x$, $1\Delta x$, $2\Delta x$, - - - $(m-1)\Delta x$ nach und nach statt x nähme.

2. Hieraus (1) und aus (263. 264. §.) folgt, daß gewisse von Δx unabhängige Coefficienten E, F, G, - - - e, f, g, - - - I, K, L, - - - i, k, l, etc. möglich sind, für welche ist

SU

$$SU = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \text{etc.}$$
$$+ E\Delta x + F\Delta x^2 + G\Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$SV = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \text{etc.}$$
$$+ e\Delta x + f\Delta x^2 + g\Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$SX = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \text{etc.}$$
$$+ I\Delta x + K\Delta x^2 + L\Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$SY = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \text{etc.}$$
$$+ i\Delta x + k\Delta x^2 + l\Delta x^3 + \text{etc.}$$

3. Nun soll, vermöge der Voraussetzung, $\Delta y > U$ und zugleich $\Delta y < V$, oder $\Delta y > X$ und zugleich $\Delta y < Y$ in (1) für jeden wie immer kleinen aliquoten Theil $\Delta x = \frac{x}{m}$ von x seyn: also muß auch die Summe derjenigen Werthe, welche Δy erhalten würde, wenn man $0\Delta x$, $1\Delta x$, $2\Delta x$, $3\Delta x$ - - - $(m-1)\Delta x$ statt x nach und nach nähme, größer seyn als SU, und zugleich kleiner als SV, oder größer als SX, und zugleich kleiner als SY in (1); mithin, weil Z der veränderliche Theil der Function y seyn soll, muß nach (260. §.) allemal seyn:

$$Z > SU \text{ und zugleich } Z < SV;$$
oder $Z > SX$ und zugleich $Z < SY$,

welches, wegen (2) nach (9. §.) unumstößlich beweiset, daß $Z = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \text{etc.}$ ist.

266. §.

Für $B = o$, $C = o$, $D = o$, u. s. f. wäre in (265. §.)

$$\Delta y > Ax^{\alpha}\Delta x; \text{ und } \Delta y < A(x+\Delta x)^{\alpha}\Delta x;$$

oder

$$\Delta y > Ax^{\alpha}\Delta x + A'x^{\alpha'}\Delta x^{r} + B'x^{\beta'}\Delta x^{r+s} + \text{etc.}$$

und

$$\Delta y < Ax^{\alpha}\Delta x + I'x^{\beta'}\Delta x^{r} + Qx^{\gamma'}\Delta x^{r+s} + \text{etc.}$$

Fände man nun, daß eine Function $y = Z + \text{Const.}$ wirklich so beschaffen ist, wie immer auch der aliquote Theil $\Delta x = \frac{x}{m}$ klein seyn mag; so wäre $Z = \frac{Ax^{a+1}}{a+1}$, und $y = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \text{Const.}$ (265. §).

267. §.

Nach (265. 266. §.) lassen sich alle Functionen von einer veränderlichen Größe x aufsuchen, und auch wirklich entweder genau, oder durch Näherung bestimmen, zu welcher Absicht wir uns sonst der Integralformul $\int x^{m}dx$ bedienen: Folgendes wird hinreichen, die Art zu erläutern, auf welche man dieselben Sätze anwenden könnte.

1. Für $CP = x$, $MP = y$, $CAMP = R$ findet man, wie in (147. §.).

$$\Delta R > y\Delta x \text{ und } \Delta R < y\Delta x + \Delta y\Delta x.$$

1. Weiter braucht man nicht zu gehen, eine allgemeine
Fig. Formul zu erhalten, wornach sich alle Räume $R = CAMP$ mögen quadriren lassen. Aus der Gleichung für die krumme Linie OMS wird man y durch x ausdrücken können,

und

und man weiß schon, daß überhaupt $\Delta y = \alpha\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \text{etc.}$ gesetzt werden kann (58. §.), welcher Ausdruck sonst aus y könnte hergeleitet werden: also wird man R allemal nach (265. 266. §.) finden können.

Z. B. Bey der Parabel ist $y = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; also hat man für sie

$$\Delta R > p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\Delta x;$$

$$\Delta R < p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\Delta x + \alpha\Delta x^2 + \beta\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Daher ist $R = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}.x = \frac{2}{3}yx + \text{Const.}$ (265. §.).

Beym Kreise, wenn der Anfangspunct der Abscissen an einem Endpuncte des Durchmessers wäre, hätte man $y = (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}$; also

$$\Delta R > (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}.\Delta x.$$

$$\Delta R < (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}.\Delta x + \alpha\Delta x^2 + \beta\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Verwandelt man daher $(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe; so wird man R ebenfalls durch eine Reihe nach (265. §.) bestimmen können.

II. Für $\alpha a = x$, $Pa = y$, $PBp = K$ erhielte man nach (148. §. n. 3.). 4. Fig.

$$\Delta K > \pi y^2\Delta x; \quad \Delta K < \pi(y + \Delta y)^2\Delta x.$$

Statt dieser Gränzen kann man aber wegen (58. §.) für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten e, f, g, u. s. f. folgende annehmen.

$$\Delta K > \pi y^2\Delta x; \quad \Delta K < \pi y^2\Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Diese

Dieſe Gränzen gäben alſo eine allgemeine Formul für die Cubatur runder Körper $K = PBp$.

Z. B. Für die Parabel iſt $y^2 = px$: alſo

$$\Delta K < \pi px\Delta x;\quad \Delta K < \pi px\Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Mithin nach (266. §.)

$$K = \tfrac{1}{2}\pi px^2 + \text{Conſt.}$$

Beym Kreiſe, wie in (1) wäre $y^2 = 2rx - x^2$: alſo

$$\Delta K > \pi(2rx - x^2)\Delta x;$$

$$\Delta K < \pi(2rx - x^2)\Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Daher nach (265. §.)

$$K = \tfrac{1}{2}\pi rx^2 - \tfrac{1}{3}\pi x^3 + \text{Conſt.}$$

III. Für $CP = x$, $MP = y$, $AM = \varphi$ fände man, wie in (1) §.:

$$\Delta\varphi > \sqrt{(mq^2 + Mq^2)},\ \text{und}\ \Delta\varphi < Mp + pm.$$

Es iſt aber $Mp = \sqrt{(pq^2 + Mq^2)} = \sqrt{(mq^2 + Mq^2 + 2mq.mp + mp^2)}$: alſo wäre auch

$$\Delta\varphi > \sqrt{(mq^2 + Mq^2)}\ \text{und}$$

$$\Delta\varphi < \sqrt{(mq^2 + Mq^2 + 2mq.mp + mp^2)}.$$

Nun iſt $BP : MP = Mq : pq = \frac{y\Delta x}{BP}$ für die Tangente MB an M; folglich iſt $mp = pq - mq = \frac{y\Delta x}{BP} - mq$. Weil alſo $Mq = \Delta x$, $mq = \Delta y$, und $\Delta y = \alpha\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \text{etc.}$ iſt (58. §.); ſo iſt klar, daß es gewiſſe von Δx unabhängige Coefficienten K, L, M, etc. k, l, m, etc. geben muß, für welche iſt:

$$\Delta\varphi > \sqrt{(\alpha^2\Delta x^2 + \Delta x^2 + K\Delta x^3 + L\Delta x^4 + \text{etc.})};$$

$$\Delta\varphi < \sqrt{(\alpha^2\Delta x^2 + \Delta x^2 + k\Delta x^3 + l\Delta x^4 + \text{etc.})}.$$

Und

Und hieraus erhellet ferner, daß es andere von Δx unabhängige Coefficienten P, Q, R, etc. p, q, r, etc. geben muß, für welche ist

$$\Delta\varphi > \Delta x\sqrt{(\alpha^2+1)} + P\Delta x^2 + Q\Delta x^3 + R\Delta x^4 + \text{etc.};$$
$$\Delta\varphi < \Delta x\sqrt{(\alpha^2+1)} + p\Delta x^2 + q\Delta x^3 + r\Delta x^4 + \text{etc.}$$

Und diese Gränzen geben eine allgemeine Formul für die Rectification krummer Linien. Ist die Gleichung für die krumme Linie gegeben; so muß man aus ihr die Ordinate y durch die Abscisse x ausdrücken, hernach Δy durch eine Reihe $\alpha\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3$ bestimmen, wobey man nur den Coefficienten α von Δx zu wissen braucht.

Z. B. Bey der Parabel ist $y = p^{\frac{1}{2}}\sqrt{x}$: also Δy

$$= p^{\frac{1}{2}}\sqrt{(x+\Delta x)} - p^{\frac{1}{2}}\sqrt{x} = p^{\frac{1}{2}}\sqrt{x} + \frac{p^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}}\Delta x + \beta\Delta x^2$$

$$+ \gamma\Delta x^3 + \text{etc.} - p^{\frac{1}{2}}\sqrt{x} = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Demnach ist hier $\alpha = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$; mithin

$$\Delta\varphi > \Delta x\sqrt{\left(\frac{p+4x}{4x}\right)} + P\Delta x^2 + Q\Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$\Delta\varphi < \Delta x\sqrt{\left(\frac{p+4x}{4x}\right)} + p\Delta x^2 + q\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Wird nun $\sqrt{\frac{p+4x}{4x}}$ in eine Reihe aufgelöst; so wird man φ nach (265. §.) ebenfalls durch eine Reihe bestimmen.

IV. In (171. §. n. 2. 3.) könnte man die Gränzen

$$\Delta S > C\Delta T;\ \Delta S < (c+\Delta C)\Delta T;$$

aber

oder

$$\Delta S < C\Delta T;\ \Delta S > (C-\Delta C)\Delta T;$$

für die allgemeinen Formuln halten, welche zur Bestimmung des Raumes S dienen sollen, den ein Punct im Fall der zu- oder abnehmenden Geschwindigkeit binnen einer Zeit T durchlaufen mag.

Z. B. Wenn die Bewegung eines Puncts beschleunigt wird, und er in der ersten Zeitsecunde die Geschwindigkeit k, binnen einer Zeit T aber die Geschwindigkeit C erlanget, und einen Weg S zurücklegt; wenn man ferner annimmt, die Geschwindigkeiten verhalten sich gegen einander wie die mten Potenzen der Zeiten; so ist $1 : T^m = k : C = kT^m$; und nun $\Delta C = k(T+\Delta T)^m - kT^m = \alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \text{etc.}$ für gewisse, von ΔT unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. also ist

$$\Delta S > kT^m\Delta T;\ \Delta S < kT^m\Delta T + \alpha\Delta T^2 + \beta\Delta T^3 + \text{etc.}$$

Daher ist nach (266. §.)

$$S = \frac{kT^{m+1}}{m+1} + \text{Const.}$$

V. In (189. §. n. 5.) hätte man für gewisse von ΔT unabhängige Coefficienten k, l, etc.

$$\Delta C > \frac{2gV}{M}\Delta T;\ \text{und}\ \Delta C < \frac{2gV}{M}\Delta T + k\Delta T^2 + l\Delta T^3 + \text{etc.}$$

oder

$$\Delta C < \frac{2gV}{M}\Delta T;\ \text{und}\ \Delta C > \frac{2gV}{M}\Delta T - k\Delta T^2 - l\Delta T^3 + \text{etc.}$$

Diese Gränzen könnten demnach zur Bestimmung der Geschwindigkeit C dienen, welche eine veränderliche, zu- oder abnehmende, Kraft binnen was immer für einer Zeit T erzeu-

erzeugen würde, wenn sie eine Masse M fort triebe. Und wenn man diese Formeln mit den in (IV.) angegebenen verbände; so würde man sich dadurch in den Stand setzen, die Bewegung jeder Masse gehörig zu beurtheilen, wofern nur das Gesetz bekannt wäre, nach welchem die bewegende Kraft vom Anfange der Bewegung an, zu- oder abnimmt; z. B. in (192. §. n. 3.) wäre

$$\Delta C < \left(\frac{2g}{P} V - \frac{2g\Phi}{P} T^{\frac{1}{2}}\right)\Delta T.$$

$$\Delta C > \left(\frac{2g}{P} V - \frac{2g\Phi}{P} T^{\frac{1}{2}}\right)\Delta T - \alpha\Delta T^2 - \beta\Delta T^3 - \text{etc.}$$

also wäre nach (265. §.)

$$C = \frac{2gV}{P} T - \frac{4g\Phi T^{\frac{1}{2}}}{3P};$$

und nun könnte man auch S nach (IV.) suchen: man würde alles, wie in (192. §.) finden.

268. §.

Aus dem Bisherigen erhellet nun deutlich, wie sehr sich die mathematischen Untersuchungen nach der Exhaustionsmethode der Alten mit Hülfe der Analysis der Neuern erweitern, und abkürzen lassen, ohne daß man nöthig hat, dieselben auf unbestimmte Begriffe zu gründen, und eben dadurch die Ueberzeugung, die sie gewähren sollen, zu schwächen. Indessen habe ich bey der vorhergehenden Theorie keine andere Absicht gehabt, als die Gränzlinie zwischen den Gründen, worauf mathematische Untersuchungen nach der Exhaustionsmethode der Alten beruhen sollten, und den Gründen der Differential- und Integralrechnung zu bestimmen,

men, mithin jene Gründe so nahe an diese zu bringen, daß man sich dadurch in den Stand gesetzt finden möge, die vortheilhafteste Methode, nach welcher die Gründe der Differentialrechnung festgesetzt werden müssen, um desto leichter daraus abnehmen zu können: der Uebergang von jenen Gründen zu diesen liegt nun vor Augen; um so kürzer kann ich demnach das fassen, was ich noch zu erklären mir vorgenommen habe.

269. §.

Am häufigsten sind bisher unendlich kleine Größen zum Gegenstande der Differentialrechnung gemacht worden, und bloß aus diesem Grunde konnte man sie als einen Theil der Analysis des Unendlichen betrachten: folgendes enthält die vorzüglichsten Meinungen darüber.

1) Für jede Function y von einer absoluten veränderlichen Größe x giebt es eine Differenz $\Delta y = \alpha \Delta x + \beta \Delta x^2 + \gamma \Delta x^3 + \text{etc.}$, wobey α, β, γ, etc. gewisse von Δx unabhängige Größen bedeuten müssen (58. §.).

2) Die Differenz $\Delta x = \frac{x}{m}$ bedeutet überhaupt einen aliquoten Theil von x, und diesen kann man unaufhörlich abnehmen lassen (47. §.): man wird zwar nie auf einen solchen Theil kommen, der nicht noch kleinere Theile unter sich hätte; doch läßt sich ein aliquoter Theil von x denken, welcher kleiner ist als jeder Theil, der sich angeben, d. h. dessen Verhältniß gegen x sich bestimmen läßt. Solche Theile von x, welche kleiner sind, als jeder Theil, der sich angeben läßt, werden unbestimmbar oder auch unendlich kleine Theile von x genannt.

3) Wenn

3) Wenn man annimmt, die veränderliche Größe x wachse um einen unendlich kleinen aliquoten Theil; so heißt er das Differential von x, und wird mit dx bezeichnet: die Größe, um welche die Function y sich ändert, zu- oder abnimmt, wenn die veränderliche Größe x um das Differential dx zunimmt, wenn sie daher in x+dx übergeht, wird das Differential von y genannt, und mit dy bezeichnet.

4) Will man nun das Differential dy einer Function y von x haben, so setze man x+dx statt x in y, und ziehe von dem Werthe, welchen y dafür erlangen mag, die Function y selbst ab, nicht anders, als wenn dx eine endliche Differenz $= \Delta x$ wäre (42. §.).

5) Nach (4) erhält man allemal den vollständigen Ausdruck für dy, dergestalt, daß für jede Function y von x sich das Differential derselben durch $dy = \alpha dx + \beta dx^2 + \gamma dx^3$ + etc. ausdrücken läßt (1): doch kann man sich dabey einer sehr vortheilhaften Abkürzung bedienen. Denn weil dx einen unendlich kleinen aliquoten Theil von x bedeutet (3), mithin dx^2, dx^3, etc. unendlich kleine aliquote Theile von höhern Ordnungen sind; so verschwinden alle Glieder βdx^2, γdx^3, etc. in Vergleichung mit dem ersten Gliede αdx; folglich ist eigentlich $dy = \alpha dx$.

6) So verfährt man auch bey der Anwendung der Differentialrechnung, wobey gemeiniglich das Differential dy einer noch unbekannten Function gesucht wird; und hier erlaubt man sich noch die gegründet seyn sollende Freyheit, unter unendlich kleinen Größen keinen Unterschied zu machen, wenn sie nur gleichartig und von einer Ordnung sind. Will

man z. B. das Differential $d\mu = Mm$ des Bogens $\mu = AM$ haben, um welches er zunimmt, wenn die Abscisse $x = CP$ um das Differential $dx = PQ = Mq$ wächst; so bedenke man, daß bey dieser Voraussetzung auch die Ordinate $y = MP$ um das Differential $dy = mq$ wachsen muß, und daß $dx = Mq$, $dy = mq$, und die Sehne Mm unendlich kleine Linien sind, daß man daher unter dem Bogen $d\mu = Mm$ und seiner Sehne Mm keinen Unterschied angeben kann; daß also, so wie die Sehne Mm, auch der Bogen $Mm = d\mu = \sqrt{(mq^2 + Mq^2)} = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$ ist.

1. Fig.

7) Aber nun entstehet die Frage, was soll man sich eigentlich bey den Differentialien dx, dy in (5) denken? Sind sie wirkliche Größen? oder Nichtse? Euler war der erste, der zu beweisen gesucht hat, daß, wenn man sonst alles genau nehmen will, man alle Differentialien gleich Null setzen muß: indessen behauptet er, daß das Differential dy einer Function y von x gegen das Differential dx in einem endlichen Verhältnisse stehen kann, wenn gleich sowohl $dy = o$, als $dx = o$ ist, etwa in (5) $dy : dx = \alpha : 1$, und eben davon hängt die Verschiedenheit der Differentialien ab, welche verschiedenen Functionen von einer veränderlichen Größe x zugehören können [a]. Nach ihm haben sich auch viele dafür erklärt, daß man überhaupt alle unendlich kleine Größen, zu welchen auch die Differentialien gehören sollen, nicht als wirkliche Größen, sondern als Nullen betrachten muß, wie dieses z. B. Karsten [b] und Schulz, [c] zu beweisen gesucht haben: daher erkläret der letztere die gesammte Analysis des Unendlichen, wovon die Differentialrechnung ein Theil

seyn

seyn soll, für eine ungemein künstliche Nullenrechnung (a. a. O. am Ende des ersten Abschnitts der ersten Abtheilung).

(a) Institutiones Calculi Differentialis. P. I. Cap. IV. §. 120.

(b) Mathematische Abhandlungen. I. Abhandl.

(c) Versuch einer genauen Theorie des Unendlichen.

8) Andere hingegen getrauen sich nicht die Differentialien als Nullen zu betrachten; sie behaupten vielmehr, man müsse dieselben für wirkliche Größen halten, die sich eben so, wie andere endliche Größen behandeln lassen. Unter den neuesten Schriftstellern hat sich Michelsen umständlich wider die Nullenrechnung (7) erklärt. Nach seiner Theorie ist das Differential dx der absoluten veränderlichen Größe x ein unbestimmbar kleines (2), doch in sich bestimmtes, oder wirkliches Stück von x, welches eben so aus neuen Theilen besteht, wie x aus Theilen dx [a]. Der eigentliche Grund, warum man sich die Abkürzung in (5) erlaubt, bestehet darin, daß $\beta dx^2+\gamma dx^3+$ etc. eine unbestimmbar kleine Größe, mithin der Unterschied zwischen $\alpha+\beta dx+\gamma dx^2+$ etc. und α dergestalt klein ist, daß er sich auf keine Art angeben läßt, daß also durch $\alpha:1$ das Verhältniß $dy:dx=(\alpha+\beta dx+\gamma dx^2+\text{etc.}):1$ in (5) in aller uns erreichbaren Schärfe richtig bestimmt wird, welches allein bey der Differentialrechnung kann verlangt werden [b].

(a) Beyträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik III. Stück. I. Aufsatz.

(b) Eulers vollständige Anleitung zur Differential-Rechnung, aus dem Lateinischen übersetzt. Anmerkungen und Zusätze zum dritten und vierten Capitel des ersten Theils.

270. §.

Die Unbestimmtheit der Begriffe von unendlich kleinen Größen ist die Quelle aller Schwierigkeiten, welchen die Rechnungen mit denselben unterworfen sind, oder wenigstens zu seyn scheinen; allerdings wäre es zu wünschen, daß man eine solche Theorie des Unendlichen hätte, welche gar keine Veranlassung zu immerwährenden Streitigkeiten gäbe. Es hat zwar die Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften im Jahr 1784 durch eine Preisfrage die Gelehrten aufgefordert, eine klare und genau bestimmte Theorie vom Mathematisch-Unendlichen, und einen sichern, klaren, mit einem Wort wahrhaft mathematischen Grundsatz anzugeben, der sich an die Stelle des Unendlichen setzen läßt, ohne daß dadurch die sonst darauf gegründeten Untersuchungen zu schwer, oder zu langweilig werden: ob aber dadurch das, was zur vollkommenen Aufklärung und Begründung der Analysis des Unendlichen nöthig war, wirklich bewirkt worden ist, etwa in den oben angeführten Schriften von Schulz und Michelsen und dem Versuch einer logischen Auseinandersetzung des Mathematischen Unendlichen von Bendavid, mögen andere entscheiden: ich will noch nur den Uebergang von der Exhaustionsmethode der Alten zur Differentialrechnung betrachten; den ihr angemessenen Gegenstand dieser Rechnung bestimmen; und die vortheilhafteste

haftefte Methode, nach welcher er behandelt werden ſollte, zu entwerfen ſuchen.

271. §.

In (265. §.) ſind ſolche Gränzen für Δy aufgeſtellt worden, auf welche man bey der Anwendung der Lehre von endlichen Differenzen nach der Erhauſtionsmethode der Alten wirklich kömmt (267. §) welche Abkürzung läßt ſich aber dabey anbringen? Die Werthe von U, V, X, Y, ſind aus (265. §) bekannt, und man hat

I. $\Delta y > U$ und zugleich $\Delta y < V$

oder

II. $\Delta y > X$ und zugleich $\Delta y < Y$.

Daher muß eine Differenz $\varphi = \Delta y - U$ da ſeyn, ſo daß $\Delta y = U + \varphi$ der vollſtändige Werth von Δy iſt. Da aber $V = U + \alpha\Delta x^2 + \beta\Delta x^3 + \gamma\Delta x^4 + \text{etc.}$ für gewiſſe von Δx unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. in (265. §) iſt; ſo muß in (I) $\varphi < \alpha\Delta x^2 + \beta\Delta x^3 + \gamma\Delta x^4 + \text{etc.}$ ſeyn. Wenn man alſo Δx abnehmen läßt, und ſich hierauf die unendlich kleine Differenz dx ſtatt Δx denkt, ſo übergeht Δy in $dy = U + \varphi$, und es ſoll $\varphi < \alpha dx^2 + \beta dx^3 + \gamma dx^4 + \text{etc.}$ mithin φ eine ganz unbeſtimmbar kleine Größe, wenigſtens von der zweyten Ordnung ſeyn. Aus I) folgt demnach ganz gewiß, daß $dy = U = Ax^a dx + Bx^b dx + Cx^c dx + \text{etc.}$ (265. §) das Differential von y iſt: und, ſo wie $y = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \text{etc.}$ wegen (I) ſeyn mußte (265. §), eben ſo muß nun derſelbe Ausdruck für y wegen

des gefundenen Ausdrucks für dy seyn. Diesen Schluß kann man auf eine ähnliche Art auch aus (II) machen. Anstatt also bey endlichen Differenzen zu bleiben, und für sie Gränzen, wie (I) II) zu suchen, um daraus die Function y selbst nach (265. 266. 267. §) herleiten zu können, ziehe man die Differentialien dy nach (269. §) in Betrachtung, und aus diesen suche man, wo es nöthig ist, die Functionen selbst zu bestimmen. Wegen (I) hat man den Ausdruck für y in (265. §) vorzüglich aus dem Grunde gefunden, weil y sich als die Summe aller vorhergehenden Differenzen betrachten ließ, welche man nach (261. §) hätte erhalten können, wenn Δy bekannt gewesen wäre: nun aber wird y die Summe aller vorhergehenden Differentialien seyn, welche ebenfalls nach (261. §) aus dy entstehen würden, oder die man sich wenigstens wegen der unbestimmbar großen Zahl m bey $dx = \frac{x}{m}$, nach (261. §) denken kann.

272. §.

Ich habe wider diese Vorstellungsart (271. §) der Infinitesimalisten (269. §) nur eine Bemerkung zu machen, daß nämlich bey ihr der Geist der Erhaustionsmethode der Alten, der doch bey allen ächten Abkürzungen und Erweiterungen derselben herrschen sollte, ganz verloren geht, und die gesammte Differentio-Integralrechnung, wenn sie auf solchen Gründen beruhen soll, nichts anders im Grunde, als eine Erweiterung und Abkürzung der Wallisischen Infinitesimalrechnung ist (258. §). Die Differenz z. B. der Function $y = ax^3$ ist $\Delta y = 3ax^2\Delta x + 3ax\Delta x^2 + a\Delta x^3$:

es mag nun hier $\Delta x = \frac{x}{m}$ ein wie immer kleiner aliquoter Theil von x seyn, man mag sich demnach x in soviel man will gleiche Theile $\Delta x, \Delta x, \Delta x \cdots \Delta x$ eingetheilt denken; so ist ganz gewiß y so groß als die Summe aller vorhergehenden Differenzen, welche man aus Δy nach (261. §.) erhalten würde. Wenn man aber sagt, $\Delta x = dx$ sey unendlich klein, mithin nun $dy = 3ax^2dx$ statt $dy = 3ax^2dx + 3axdx^2 + adx^3$; so darf man nicht mehr sagen, y sey die Summe aller vorhergehenden Differentialien, in welche die Summe jener Differenzen übergeht, wenn dx aus Δx wird, man mag sich bey dx etwas, oder gar nichts von x denken (269. §. a. 8. 7.): zum Glück kann keine Untersuchung gewiesen werden, bey welcher man nöthig hätte, jede Function y sich als die Summe aller vorhergehenden Differentialien zu denken, wie immer auch dieses Hr. Michelsen für unentbehrlich hält.

273. §.

Alles, was man aus den Gränzen $\Delta y > U$ und $\Delta y < V$ in (265. §.), nämlich $\Delta y > Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + Cx^c\Delta x + \text{etc.}$, und $\Delta y < A(x+\Delta x)^a\Delta x + B(x+\Delta x)^b\Delta x + C(x+\Delta x)^c\Delta x + \text{etc.}$ mit vollkommenster Ueberzeugung folgern kann, bestehet darinn, daß $(Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.}) : 1$ die Gränze des Verhältnisses $\Delta y : \Delta x$ der Differenz Δy der Function y gegen die Differenz Δx der absoluten veränderlichen Größe x ist, und daraus die Function selbst $y = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \text{etc.}$ erkannt wird (265. §).

Denn man hat zuerst $\Delta y > Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + \text{etc.}$, woraus nothwendig folgt, daß für irgend eine Differenz φ

I. $\Delta y = Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + \text{etc.} + \varphi$,

also II. $\Delta y : \Delta x = (Ax^a + Bx^b + \text{etc.} + \frac{\varphi}{\Delta x}) : 1$

seyn muß. Weil ferner $\Delta y < A(x+\Delta x)^a\Delta x + B(x+\Delta x)^b\Delta x + C(x+\Delta x)^c\Delta x + \text{etc.}$, oder $\Delta y < Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + Cx^c\Delta x + \text{etc.} + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \delta\Delta x^4 + \text{etc.}$ für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten β, γ, δ, etc. seyn soll; so hat man, wenn man Δy aus (I.) nimmt

$\varphi < \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \delta\Delta x^4 + \text{etc.}$, daher

$\frac{\varphi}{\Delta x} < \beta\Delta x + \gamma\Delta x^2 + \delta\Delta x^3 + \text{etc.}$

Es kann aber $\beta\Delta x + \gamma\Delta x^2 + \delta\Delta x^3 + \text{etc.}$ kleiner werden als jede denkbare, wie immer kleine gleichartige Größe (47. 3. §.): dieses gilt also auch für $\frac{\varphi}{\Delta x}$; Folglich ist $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.}$, die Gränze der sich, während der allmählichen Abnahme der Differenz Δx, ändernden Function $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.} + \frac{\varphi}{\Delta x}$ (48. §), und das Verhältniß $(Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.}) : 1$ ist die Gränze des veränderlichen Verhältnisses $\Delta y : \Delta x$ (88. §. Anm. V).

274. §.

Die Untersuchung über die Gränzen, zwischen welchen die Differenzen Δy gewisser Functionen y nach der Exhaustionsmethode der Alten liegen sollen, führt uns demnach ganz ungezwungen auf die Betrachtung der Differentialverhältnisse

hältniſſe derſelben Functionen, und zeigt uns zugleich einen dem Geiſte jener Methode angemeſſenen Weg, auf dem ſich ſolche Verhältniſſe entdecken, und aus ihnen die Functionen ſelbſt beſtimmen laſſen (52. 273. 265. §.) und eben dieſe Verhältniſſe als Gränzen, welchen die Differenzverhältniſſe $\Delta y : \Delta x$ ſich ohne Ende nähern, wenn die Differenzen Δx der abſoluten veränderlichen Größen x ohne Ende abnehmen (nicht aber als Verhältniſſe der Gränzen, welchen die Differenzen Δy, Δx ſelbſt ſich nähern), ſollen den eigentlichen Gegenſtand der Differentialrechnung ausmachen. So urtheilen von der Differentialrechnung die berühmteſten Analyſten: alle behaupten, daß, was mit Hülfe der Differentialrechnung geſucht wird, ſey nichts anders als die Gränze des Verhältniſſes $\Delta y : \Delta x$, nicht aber die Gränze der Differenz Δy, oder das Verhältniß der Gränzen der Differenzen Δy, Δx; und doch iſt die Methode, nach welcher ſie jenen Gegenſtand abhandeln, vorzüglich bey der Anwendung der Differentialrechnung, dergeſtalt beſchaffen, daß ſie oft an ſolche Verhältniſſe gar nicht zu denken ſcheinen, oder dieſe aus Gründen herleiten, welche unvermögend ſind, die erwünſchte Ueberzeugung zu gewähren. Daher war ich ſchon lange der Meinung, daß die Methode, nach welcher die Differentialverhältniſſe müſſen abgehandelt werden, einer ferneren Vervollkommnung bedarf, zu welcher nur die genaueſte Befolgung der Archimedeiſchen Exhauſtionsmethode führen kann: dadurch iſt meine Darſtellungsart im 2ten Bande veranlaßt worden. Damals war mir die Preisſchrift des Herrn L'Huilier [a] nur dem Titel nach bekannt; ſpäter habe ich aber ſowohl

sie, als die lateinische Erweiterung derselben (b) gelesen. L'Huiliers Verdienste um die Erweiterung der Gränzenlehre und ihrer Anwendung sind unverkennbar: indessen fand ich keinen hinreichenden Grund, die Methode, nach welcher ich die Gründe der Differentialrechnung abhandeln zu müssen glaubte, zu verlassen; ich wurde vielmehr in meinem Urtheile bestärkt, daß nämlich eben diese Methode sich durch viele damit verbundene Vortheile vor jeder andern empfiehlt.

(a) Exposition Elementaire des Principes des Calculs supérieurs.

(b) Principiorum calculi Differentialis et Integralis Expositio Elementaris.

275. §.

Die gesammte Differential- und Integralrechnung ist mit der Erfindung der Functionen beschäftigt; derjenigen, durch welche die Exponenten der Differentialverhältnisse gewisser, bekannten oder unbekannten, Functionen bestimmt werden; und derer, welche mit gewissen Differentialverhältnissen in einer nothwendigen Verbindung stehen: der Grund jener Erfindung soll darin zu finden seyn, daß jede Function mit dem Exponenten des ihm zugehörigen Differentialverhältnisses, in Ansehung der Form und Größe, nach einem vollkommen bestimmten Gesetze verbunden ist. Schon aus diesem Grunde, und zugleich deswegen, weil durch analytische Formuln die Vernunftschlüsse, derer man sich bey der Abhandlung mathematischer Gegenstände zu bedienen hat, gleichsam versinnlicht, und eben dadurch

dieselbe

dieſelbe Abhandlung ungemein abgekürzt und erleichtert wird, glaubte ich, die Differentialrechnung könne nicht vortheilhafter abgehandelt werden, als wenn man von einer allgemeinen für alle Functionen geltenden Formul ausgeht, und daraus alles herleitet, was zu einem vollſtändigen, wahrhaft mathematiſchen Lehrgebäude erfordert wird.

376. §.

Dem zufolge habe ich im erſten Abſchnitte dieſer Beylage dafür geſorgt, daß man im Stande ſeyn möge, nicht nur den binomiſchen Lehrſatz, ſondern auch die, ſchon für ſich merkwürdigen, logarithmiſchen und trigonometriſchen Reihen, aus den ſicherſten Gründen der Elementarmathematik, und auf eine leichte Art in jeder erforderlichen Allgemeinheit herzuleiten, und darauf den Satz (31. §.) mit aller Schärfe beweiſen zu können. Herr Hofrath Käſtner hat den Ausdruck $y = ax^m + bx^{m+\delta} + cx^{m+2\delta} + \text{etc.}$ für jede Function y von x poſtulirt, und darauf den Beweis des Tayloriſchen Lehrſatzes (II. Band. 67. §.) gegründet. (a) Herr L'Huilier hat ebenfalls dieſen Beweis angenommen, doch y allgemeiner durch $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.}$ in der von mir (II. Band. 6. §.), und oben (31. §.) beſtimmten Bedeutung ausgedrückt: er führt zwar noch einen Beweis nach Pfleiderer an, wobey aber ein neues Poſtulatum vorkömmt, nämlich der Ausdruck $\Delta y = \alpha \Delta x + \beta \Delta x^2 + \gamma \Delta x^3 + \text{etc.}$ für die Differenz Δy jeder Function y von

y von x [b], welcher bey mir mußte erwiesen werden (57. §.).

(a) Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen. II. Auflage. 151. §.

(b) Principiorum Calculi Diff. et Integr. Exp. Elementar. 30-33. §.

277. §.

Nun war es mir sehr leicht, aus der allgemeinen Formul der Functionen, und den vollkommen bestimmten Begriffen von Differenzen, und Differentialverhältnissen, mit Zuziehung eigener Bezeichnungen (52. §.), die allgemeinen Gründe der Differentialrechnung mit aller Evidenz und Gewißheit, deren analytische Untersuchungen nach der Erhaustionsmethode der Alten fähig sind, auf einem halben Bogen herzuleiten (52 - 69. §.), woraus alle übrigen Sätze sich, als eben soviele, sich jedem geschickten Forscher gleichsam aufdringende, Folgen, abnehmen lassen. Die Wichtigkeit des allgemeinen Satzes (69. §.), welcher ganz dem Geiste der Archimedeischen Erhaustionsmethode entspricht (273. §.), zeigt sich erst bey wirklicher Anwendung der Differentialrechnung, wovon hinreichende Beyspiele im 3ten Abschnitte vorkommen: aber auch die Sätze (67. 68. §.), so unbedeutend sie auch scheinen mögen, tragen zur Gründlichkeit der Untersuchungen bey der Erfindung der Differentialverhältnisse, und der damit verbundenen Functionen nicht wenig bey: und selbst der Umstand verdient einige Aufmerksamkeit, daß nach dieser Methode ein Anfänger in Stand

gesetzt

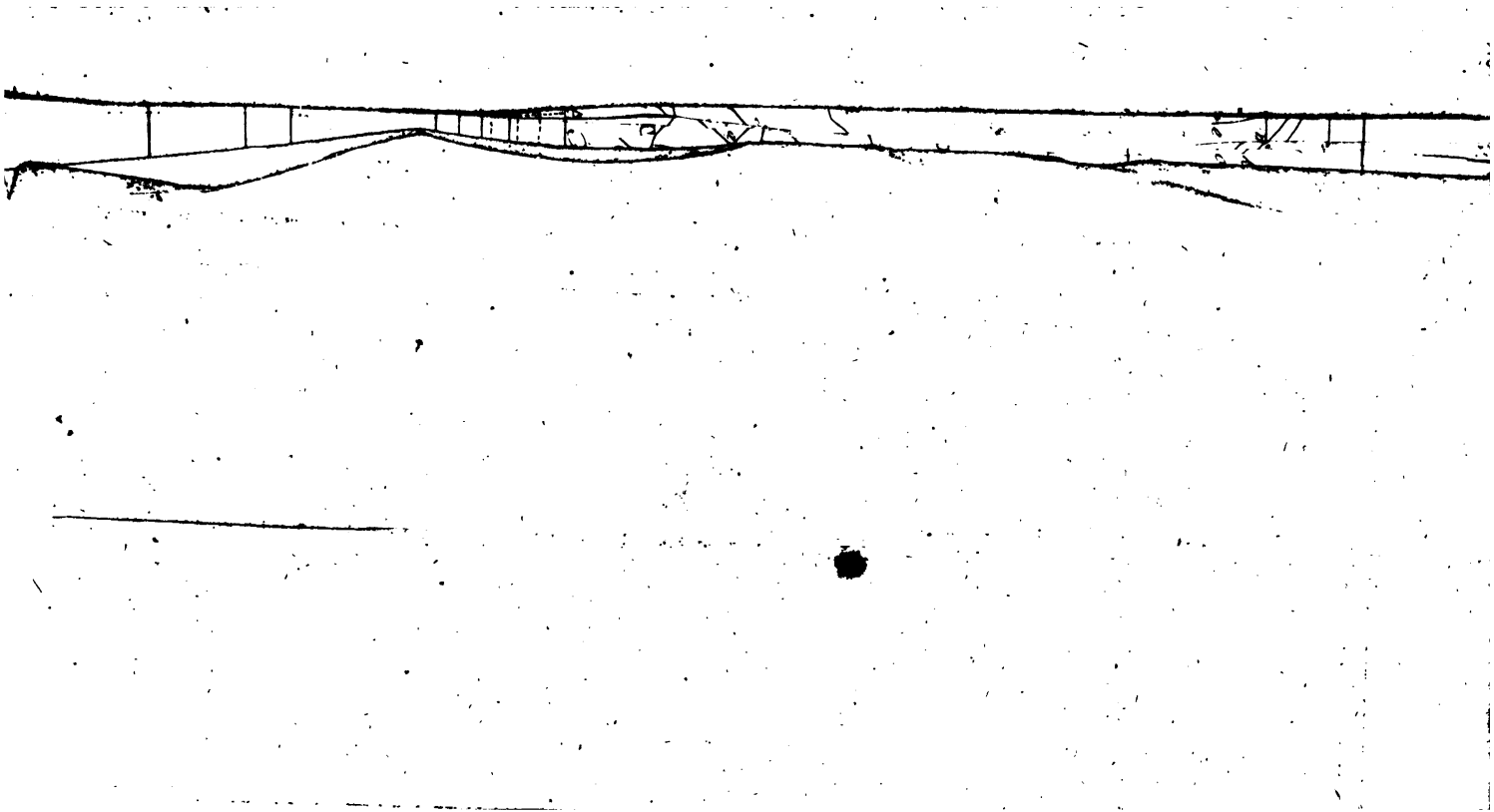
gesetzt wird, aus den wenigen allgemeinen Gründen (52 bis 69. §.) sich von der Brauchbarkeit der Differentialverhältnisse bey mathematischen Untersuchungen, und dem eigentlichen Grunde davon zu überzeugen, ohne dazu eines Beyspiels zu bedürfen (70. §.).

278. §.

Ueberhaupt wird man bemerken, daß ich die Erfindung der Differentialverhältnisse, für bekannte und unbekannte Functionen auf zweene mit aller Schärfe erwiesene Sätze (59. 69. §.) gegründet habe. Ueberall blieb ich dem in (52. §.) festgesetzten Gegenstande der Differentialrechnung getreu; überall, sowohl bey der Theorie im 2ten, als bey der Anwendung im 3ten Abschnitte, werden nur die Differentialverhältnisse betrachtet, und ihre Exponenten aus ihren eigenthümlichen Gründen hergeleitet, dergestalt, daß man hier gar keinen Grund finden kann, die Differentialrechnung zur Infinitesimalrechnung, oder zu der sogenannten Analysis des Unendlichen, als einen Theil davon, zu rechnen: es ist vielmehr einleuchtend, daß sie hier, und überall, wo sie zweckmäßig abgehandelt wird, als ein Theil der Analysis endlicher Größen erscheint, und wirklich erscheinen muß. Die Zeichen dy, dx statt $\Delta y, \Delta x$ sind durch die Betrachtung der unendlich kleinen Differenzen, der sogenannten Differentialien, und ihrer Verhältnisse gegen einander veranlaßt worden (269. §.), wovon die Exponenten der Differentialverhältnisse und diese Verhältnisse selbst wesentlich unterschieden sind (274. §.): werden daher

blos

blos dieſe Exponenten bey Unterſuchungen gebraucht; ſo müſſen ſie eigene Zeichen haben: dafür habe ich die Zeichen dy, dx beybehalten, welche demnach hier endliche Größen bedeuten. Herr L'Huilier, um doch den Exponenten des Differentialverhältniſſes einer Function y von x von dem ſonſt üblichen Differential zu unterſcheiden, bezeichnet jenen mit $\frac{dy}{dx}$: zweckmäßiger würde man ihn mit ey bezeichnen, zu geſchweigen, daß auch der Gebrauch dieſes Zeichens bey Rechnungen viel bequemer ſeyn würde.



Denn man hat zuerst $\Delta y > Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + \text{etc.}$, woraus nothwendig folgt, daß für irgend eine Differenz φ

I. $\Delta y = Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + \text{etc.} + \varphi$,

also II. $\Delta y : \Delta x = (Ax^a + Bx^b + \text{etc.} + \frac{\varphi}{\Delta x}) : 1$

seyn muß. Weil ferner $\Delta y < A(x+\Delta x)^a\Delta x + B(x+\Delta x)^b\Delta x + C(x+\Delta x)^c\Delta x + \text{etc.}$, oder $\Delta y < Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + Cx^c\Delta x + \text{etc.} + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \delta\Delta x^4 + \text{etc.}$ für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten β, γ, δ, etc. seyn soll; so hat man, wenn man Δy aus (I.) nimmt

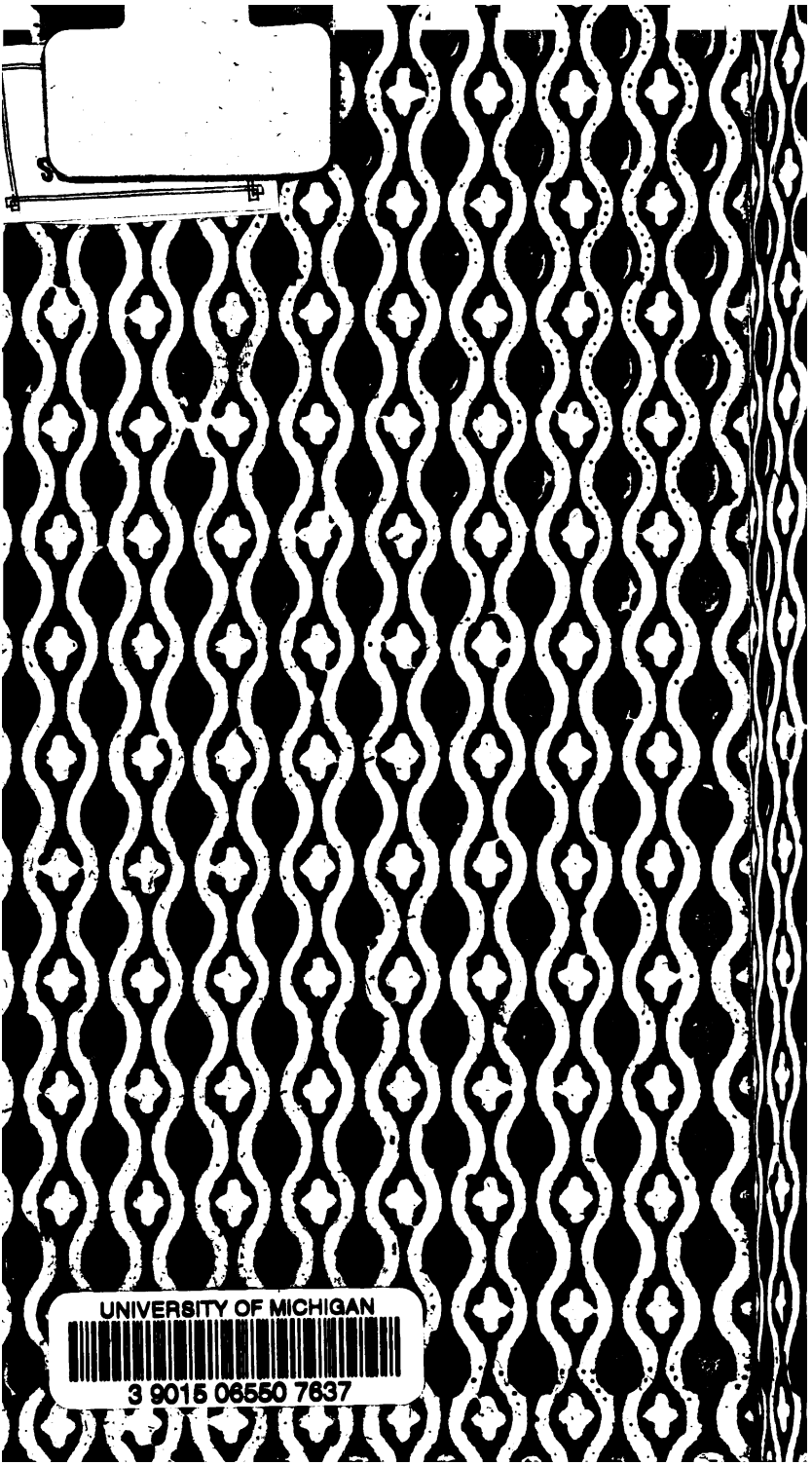
$$\varphi < \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \delta\Delta x^4 + \text{etc., daher}$$

$$\frac{\varphi}{\Delta x} < \beta\Delta x + \gamma\Delta x^2 + \delta\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Es kann aber $\beta\Delta x + \gamma\Delta x^2 + \delta\Delta x^3 + \text{etc.}$ kleiner werden als jede denkbare, wie immer kleine gleichartige Größe (47. 3. §.): dieses gilt also auch für $\frac{\varphi}{\Delta x}$; Folglich ist $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.}$, die Gränze der sich, während der allmählichen Abnahme der Differenz Δx, ändernden Function $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.} + \frac{\varphi}{\Delta x}$ (48. §.), und das Verhältniß $(Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.}) : 1$ ist die Gränze des veränderlichen Verhältnisses $\Delta y : \Delta x$ (88. §. Anm. V).

274. §.

Die Untersuchung über die Gränzen, zwischen welchen die Differenzen Δy gewisser Functionen y nach der Exhaustionsmethode der Alten liegen sollen, führt uns demnach ganz ungezwungen auf die Betrachtung der Differentialverhältnisse


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06550 7637